LETTRE LXXVI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Recherches arithmétiques; suite.

Moscau d. 1 October 1744.

Ich lasse dahingestellt seyn, ob bey jetzigen Zeitläuften nicht indépendamment de toute attraction Newtonienne, trente raisons mögen gewesen seyn, wodurch man die Austheilung des Preises zu differiren genöthiget worden.

Mein voriger Brief wurde in solcher Eile geschrieben, dass ich gar vergessen zu melden, warum ich die eingeschlossenen Blätter beygefüget. Ich habe in vorigen Jahren von unterschiedenen Briefen, die es nicht werth gewesen, Copien behalten, wovon, als ich dieselben unlängst durchgeblättert, ein guter Theil cassiret worden; weil aber doch in den übersandten Blättern einige Anmerkungen über die numeros negativos waren, so sich wohl möchten behaupten

lassen, habe ich selbige Ew gleichsam vor die lange Weile communiciren wollen. Was sonsten von seriebus darinnen enthalten seyn mag, hat mir damals neu geschienen, und ist nunmehro von keiner Erheblichkeit.

Ew. Methode, die numeros $aa+1$, so durch den numerum primum $4n+1$ divisibiles sind, zu finden, gefället mir sehr; ich glaube kaum, dass ein anderer processus in diesem Falle möglich sey, und dass derselbe wohl Niemandem vor Ew. bekannt gewesen seyn mag.

Es ist mir unlängst bey der formula $emn..fm..gn$ Folgendes eingefallen: Innumerabiles sunt numeri, qui ad hanc formulam $10mn \pm (m+7n)$ redigi non possunt, ut 1, 3, 4, 6, 9, 10 etc., sed nulla potest dari formula generalis algebraica $a+bx+cxx+$ etc. (ubi x designet numerum integrum variabilem, a, b, c, etc. constantes) ita comparata, ut dici possit $10mn \pm (m+7n) = a+bx+cxx+$ etc. quemadmodum dici potest $4mn - m - n = xx$. Man könnte zwar sagen, dass auch mn für sich allein dieselbe Eigenschaft hat, es ist aber selbiges theils alsofort evident, theils gehöret mn nicht eigentlich zur formula $emn..fm..gn$, allwo durch e, f, et g numeri integri verstanden werden.

Ich möchte wohl wissen, ob Ew. den numerum e in dieser Proposition $A...emn - m - n = aa$, ausser dem casu, da e ein multiplus quaternarii ist, auf vielerley Art determiniren können? Dieses kann ich indessen demonstriren, dass die propositio A allezeit falsch ist, wenn e nicht diese Form hat $(4hk - h + 1)$, so dass h und k numeri integri affirmativi seyen; denn wenn e diese Form nicht hätte, so wäre A evidenter falsch in casu $n = 1$, und folglich nicht universaliter negans.

Als mir neulich ein Theil von den Mémoires de l'Académie p. l'année 1734 in 8° in die Hände gerathen, habe ich daselbst p. 268 s. des Hn. Clairaut solution de plusieurs problèmes etc. angetroffen. Die Solution, so er gibt, kann meines Erachtens nicht generalior erdacht werden, und was er von dem problème troisième sagt, scheinet mir auch sehr merkwürdig. Der Hr. Bouguer brauchet, vor das signum, so Ew. schreiben $\nless$, dieses $\geqq$, welches zwar nicht compendiös, aber sehr expressif ist.

Goldbach.

LETTRE LXXVII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE Même sujet.

Berlin d. 17. November 1744.

— — — Dass Ew. meine Methode die numeros $aa+1$ zu finden, so durch den numerum primum $4N+1$ theilbar sind, einiger Attention gewürdiget, erfreuet mich sehr: Der Beweis davon ist dieser: Wenn $aa+bb$ divisores haben soll, so müssen die Buchstaben a und b also beschaffen seyn $a=mp+nq$ und $b=mq-np$; denn da wird $aa+bb=(mm+nn)(pp+qq)$, und folglich ist $aa+bb$ divisibel durch $pp+qq$. Da nun $4N+1$ immer auf die Form $pp+qq$ gebracht werden kann, so müssen solche Zahlen für m und n gefunden werden, damit $b=$ wird ± 1, oder $mq-np=\pm 1$. Wenn ich also aus der Aequalität $4N+1=pp+qq$ den Bruch $\frac{p}{q}$ formire, so muss ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$ gesucht werden dergestalt, dass wenn diese Brüche $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$ per crucem multiplicirt werden, die producta mq und np nur unitate differiren; oder der Bruch $\frac{m}{n}$ muss in minoribus numeris dem Bruch $\frac{p}{q}$ proxime gleich seyn. Wenn ich nun mit den Zahlen p und q die Operation anstelle, welche man um den maximum communem divisorem davon zu finden, zu machen pflegt, und aus den quotis auf vorher beschriebene Art fractiones formire, so ist der letzte Bruch $= \frac{p}{q}$; und da in einer solchen Reihe Brüche, zwey neben einander stehende immer so beschaffen sind, dass die producta ex multiplicatione per crucem orta nur um 1 von einander differiren, so kann die fractio penultima für $\frac{m}{n}$ angenommen werden, da dann herauskommt $a = mp + nq$.

So viel ich mich erinnere, so sind mir die in den jüngstens überschickten Briefen enthaltenen Begriffe von den numeris imaginariis sehr gründlich vorgekommen.

Wenn $emn + fm + gn = a + bx + cxx$, so würde auch $4cemn + 4cfm + 4cgn = 4ac + 4bcx + 4ccxx = 4ac - bb + (b + 2cx)^2$ und folglich würde $4cemn + 4cfm + 4cgn - 4ac + bb = \square$. Ob es nun möglich ist dergleichen Formuln zu finden? so kommt es darauf an, ob es solche Formuln gebe $emn \pm fm \pm gn \pm h$, welche immer ein Quadrat werden können. Ich habe aber auf dergleichen Formuln vorher nicht gedacht und darüber auch noch jetzt nichts entdecket, welches an Ew. überschrieben zu werden verdiente.

Was die Formul $emn - m - n$ betrifft, so habe ich sehr weit hinaus alle Zahlen für e gesucht, in welchen diese

Formul ein quadratum werden kann, und habe gefunden, dass für e alle Zahlen gesetzt werden können, ausser diesen: 4, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 32, 36, 39, 40, 44, 47, 48, 52, 55, 56, 60, 63, 64, 68, 71, 72, — so weit bin ich mit meiner Untersuchung gekommen. Da nun in diesen Zahlen keine andere, als welche in diesen beyden formulis $4k$ und $8k - 1$ enthalten sind, vorkommen, so däucht mich die Induction richtig zu seyn, wenn ich sage, dass sowohl diese Formul $4kmn - m - n$ als diese

$$(8k - 1)mn - m - n$$

kein Quadrat werden könne. Ich habe noch, nicht nur keine von diesen beyden formulis falsch befunden, sondern wenn auch für e irgend eine andere Zahl ausser $4k$ und $8k - 1$ angenommen wird, so habe ich noch immer die Formul $emn - m - n$ auf ein Quadrat bringen können.

Auf Ew. Veranlassung habe ich des Hn. Clairaut pièce in den Mémoires A. 1734 nachgelesen. Die Solution der beyden erstern ist die Newtonianische, und kann freylich nicht allgemein seyn. Das dritte problema ist in der That sehr merkwürdig. Die Solution ist aber so beschaffen, dass dieselbe auf keinen andern, als einen rechten Winkel applicirt werden kann, da doch der casus, wenn der angulus nicht rectus ist, eben so möglich ist. Ich habe mit dem Hn. Clairaut viel darüber correspondirt, wir haben aber beyde diesen letztern casum nicht ins Reine bringen können.

Euler.

LETTRE LXXVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 26. Januar 1745.

Aus Ew. letzterm Schreiben habe ich ersehen, dass Sie zu der aequatione $emn - m - n$ keine andere valores vor e, als die entweder multipli quaternarii, oder $= 8k - 1$ sind, gefunden haben; weil Sie sich aber hierin blos auf eine Induction beziehen, so habe hiebey anmerken wollen, dass, wenigstens ausser diesen beyden casibus, die propositio $emn - m - n = aa$ allezeit falsch ist und die quadrata, denen $emn - m - n$ gleich wird, sogar angegeben werden können, so oft entweder e oder $e - 1$ ein divisor von einem quadrato unitate aucto seyn kann. Denn in casu primo, ubi $be = cc + 1$, fiat $n = b + 1$, $m = b + bb$, erit

$$emn - m - n = eb(b+1)^2 - b(b+1) - (b+1) = (eb-1)(b+1)^2 = cc(b+1)^2;$$

in casu secundo, wenn $e - 1$ ein divisor ist von $aa + 1$, ponatur $m = 1$, $n = \frac{aa+1}{e-1}$. Igitur nullae aliae sunt formulae possibiles pro e in propositione $emn - m - n = aa$, nisi cum e est vel quaternarius (aut ejus multiplus quicunque), vel cum e est $= 8k - 1$; utrovis enim casu tam e quam $e - 1$ nullo modo dividere possunt quadratum unitate auctum; hinc fit, ut quamvis $4k - 1$ non possit dividere quadratum unitate auctum, tamen ad exprimendum valorem e in propositione $emn - m - n = aa$ ineptum sit, propterea quod $e - 1 = 4k - 2$ potest esse divisor quadrati unitate aucti, ex quibus sequitur praeter numeros in formulis $4k$ et $8k - 1$ comprehensos, alios nullos posse substitui pro e, quoniam scilicet nulli alii hac gaudent proprietate, ut tam e, quam $e - 1$ dividere nequeat quadratum unitate auctum, etsi non demonstratum sit omnes numeros hujus formae $8k - 1$ pro e positos satisfacere, quod tamen verisimillimum arbitror, nec dubito quin aliqua ratione, quae mihi nunc non suppetit, demonstrari possit.

Auf meiner Rückreise von Moscau hieher ist mir eingefallen, dass vielleicht die propositio de numeris primis hujus formae $4n + 1$, qui sunt summae duorum quadratorum, nur ein corollarium hujus theorematis seyn möchte: Omnes numeri hujus formae $4n + 1$, qui dividi nequeunt per numerum hujus formae $4m \mp 1$, tot modis sunt summae duorum quadratorum, quot modis dispesci possunt in duos factores, ex. gr. 65 est numerus hujus formae $4n + 1$, nec dividi potest per numerum ullum formae $4m - 1$, ergo 65 tot modis est summa duor. quadr. quot modis dispesci potest in duos factores, nempe duobus modis (1) 1.65, (2) 5.13, est igitur aggregatum duor. quadr. (1) $1+64$, (2) $16+49$.

Similiter 25 est numerus hujus formae $4n+1$ nec dividi potest per numerum hujus formae $4m-1$, igitur cum dupliciter resolvi possit in duos factores, nempe (1) in 1 et 25, (2) in 5 et 5, erit dupliciter summa duorum quadratorum (1) $0+25$, (2) $9+16$.

Similiter numerus 625 ejusdem naturae tripliciter resolvitur in duos factores (1) 1.625, (2) 5.125, (3) 25.25, ergo tripliciter est summa duor. quadr. (1) 0^2+25^2, (2) 7^2+24^2, (3) 15^2+20^2.

Numerus 493 ejusdem naturae duobus modis resolvi potest in duos factores (1) 1.493, (2) 17.29, ergo duobus modis est summa duor. quadr. (1) 3^2+22^2, (2) 13^2+18^2 etc.

Uebrigens habe ich zwey Methoden, wenn die aequatio $emq-q-m=aa$ in einem casu q possibilis ist, innumeros alios casus pro aequatione $emn-m-n=bb$ zu finden, nämlich si fiat

$$\text{I. } q-2ak+(em-1)kk=n,$$

$$\text{II. } ((em-1)h+1)^2q-hm((em-1)h+2)=n$$

ubi h et k sint numeri quicunque, modo n fiat integer, deren Wahrheit per ipsam substitutionem alsofort demonstriret wird.

Goldbach.

LETTRE LXXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches arithmétiques. Problème de la courbe catoptrique. Equation différentielle à intégrer.

Berlin d. 16 Februar 1745.

— — Dass diese Formul $emn-m-n$ nimmer ein Quadrat seyn könne, wenn e entweder eine solche Zahl $4k$, oder eine solche $8k-1$ ist, habe ich nur aus einer Induction geschlossen. Diese Observation erhält aber durch Ew. Entdeckung einen weit grössern Grad der Gewissheit. Denn dadurch wird unwidersprechlich dargethan, dass so oft entweder e oder $e-1$ ein divisor ist von $cc+1$, für m et n allezeit solche Zahlen gefunden werden können, dass $emn-m-n$ ein Quadrat wird. Weil nun weder $4k$ noch $8k-1$ immer hierin Platz finden können, so kann auf diese Art weder für $e=4k$, noch für $e=8k-1$ die Formul $emn-m-n$ zu einem Quadrat gebracht werden. Um aber die Demonstration vollkommen zu machen, so müsste man auch die propositionem conversam beweisen können, dass so oft $emn - m - n$ ein Quadrat seyn kann, auch entweder e oder $e - 1$ ein divisor sey von einer solchen Zahl $xc + 1$. So lang also dieses nicht erwiesen ist, so lang kann man auch nicht behaupten, dass der obige Satz völlig bewiesen worden, ob man gleich daran gar keine Ursach zu zweifeln hat. Es gibt in der Arithmetik eine grosse Menge solcher Sätze, an welchen Niemand zweifelt, ungeacht man dieselben nicht demonstriren kann. Ich habe zum Ex. diesen Satz noch nirgend bewiesen gefunden: qui numerus in integris non est summa duorum quadratorum, eundem ne in fractis quidem esse posse summam duorum quadratorum. Um dieses zu beweisen, müsste man zeigen, dass, wenn ann einer summa duorum quadratorum gleich ist, auch allzeit a eine summa duorum integrorum quadratorum seyn müsse. Gleichergestalt ist leicht zu demonstriren, dass das Product ex binis summis duorum quadratorum, auch eine summa duorum quadratorum sey. Hieraus erhellet aber noch nicht, dass, wenn eine summa duorum quadratorum per summam duorum quadratorum dividirt wird, der quotus auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse, woran doch Niemand zweifelt. Es ist auch meines Bedünkens noch nicht erwiesen, dass eine summa duorum quadratorum inter se primorum keine andere divisores haben könne, nisi qui sint ipsi duorum quadratorum summae. Eine gleiche Bewandniss hat es auch mit dieser Proposition: Omnem numerum primum hujus formae $4n + 1$ semper esse summam duorum quadratorum, idque unico modo. Wenn man nun dieses voraussetzt, so liessen sich Ew. theoremata leicht erweisen. Denn, wenn $4n + 1$ keinen divisorem hat formae

$4m - 1$, so müssen alle factores von dieser Form $4m + 1$ und folglich summae duorum quadratorum seyn. Es ist aber generaliter $(aa + bb)(cc + dd) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$ und also duplici modo in duo quadrata resolubile. Hernach lässt sich auch leicht erweisen, quod, si quis numerus duplici modo in duo quadrata fuerit resolubilis, eum non esse primum. Sit enim $N = aa + bb = cc + dd$, erit $N = \frac{((a-c)^2 + (b-d)^2)((a+c)^2 + (b-d)^2)}{4(b-d)^2}$. Ferner hat auch dieser Satz seine Richtigkeit: Si numerus $4n + 1$ unico modo in duo quadrata resolvi possit, tum certo erit numerus primus; sin autem $4n + 1$ nullo modo fuerit summa duorum quadratorum, tum non erit primus, sed factores habebit formae $4m - 1$ vel duos, vel 4, vel 6, etc. At si $4n + 1$ pluribus modis fuerit summa duorum quadratorum, tum quoque binos pluresve habebit factores formae $4m + 1$. Und aus diesem Grunde ist nicht schwer, sehr grosse Zahlen $4n + 1$ zu untersuchen, ob dieselben primi sind, oder nicht?

Gleich wie ich bewiesen habe, dass alle divisores primi hujus formae $a^2 + b^2$ in dieser Expression $4n + 1$ enthalten sind, also kann ich auch demonstriren, dass alle divisores von $a^4 + b^4$ in dieser Form $8n + 1$, und generaliter dass alle divisores von $a^{2^m} + b^{2^m}$ in dieser Form $2^{m+1}n + 1$ enthalten sind. Folgende theoremata kann ich auch rigorose beweisen:

I. Si $a^m - b^m$ fuerit divisibilis per numerum primum $2n + 1$, atque p sit maximus communis divisor numerorum m et $2n$, tum quoque $a^p - b^p$ per $2n + 1$ divisibilis erit.

II. Si haec formula $af^n - bg^n$ fuerit divisibilis per numerum primum $mn + 1$, tum quoque $a^m - b^m$ per $mn + 1$

erit divisibile. Si ergo pro f et g ejusmodi numeros invenire liceat, ut $af^n - bg^n$ sit divisibile per $mn+1$, tum formula $a^m - b^m$ necessario erit per $mn+1$ divisibilis.

Ich bin letztens auf dieses problema gefallen: (Fig. 10) Circa datum punctum radians R curvam describere ejusmodi, ut singuli radii ex R egressi post duplicem reflexionem in M et N in ipsum punctum R revertantur. Es gibt ausser der Ellipse, alterum focum in R habente, noch unendlich viel andere Linien quaesito satisfacientes, sowohl algebraicae als transcendentes; und dieses problema däucht mich eines von den schwersten in hoc genere zu seyn.

Haec aequatio
$$ay\,dy + y\,dx(3ax+b) + dx(ax^3 + bxx + cx + f) = 0$$
potest separari et integrari.

Euler.

LETTRE LXXX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse aux deux derniers articles de la précédente.

St. Petersburg d. 29 Mai 1745.

Die integrationem aequationis
$$ay\,dy + y(3ax+b)\,dx + (ax^3 + bxx + cx + f)\,dx = 0$$
halte ich vor sehr leicht, indem ich alsofort gefunden $y = -xx + \beta x + \gamma$, ubi $aa\beta^3 + 2ab\beta\beta + (ac+bb)\beta + bc = af$ et $\gamma = \frac{-a\beta\beta \mp b\beta - c}{a}$.

Was das andere problema betrifft, so wird die curva nachfolgende proprietates haben:

1. muss (Fig. 11), posita $AB = x$, $BC = y$, $HA = a$, $AG = b$, y eine solche functio ipsius x seyn, dass positis $x = -a$ et $x = b$, $y = 0$ werde.

2. Weil die pars axis inter radium incidentem AC et radium reflexum CD intercepta, nehmlich AD per x et y

ope normalis CN bekannt wird, folglich posita $AD = u$, u per x et y data ist, so muss auch positis $AF = x'$, $FE = y'$, die inter radios AE et ED intercepta eadem pars axis AD per x' et y' gegeben seyn, durch welche Aequation y' eliminirt wird.

3. Fiat $\frac{CB}{y} : \frac{BD}{u-x} :: \frac{DF}{x'-u} : \frac{EF = y'}{\frac{(u-x)(x'-u)}{y}}$, wodurch x' eliminirt wird. Wenn endlich auch

4. die summa radiorum incidentis et reflexi usque ad axem entweder constans (wie in der ellipsi), oder certae cuidam functioni ipsius x gleich gesetzt wird, so kann dadurch auch y per x determiniret werden, wiewohl ich dieses alles jetzo nicht gnugsam einsehe und Ew. besseren Beurtheilung überlasse.

Goldbach.

LETTRE LXXXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mêmes sujets.

Berlin d. 19 Juni 1745.

— — Da ein jegliches integrale, wenn es vollständig seyn soll, eine neue quantitatem constantem in sich enthalten muss, welche in dem differentiali nicht gewesen, so ist die formula $y = -xx + \beta x + \gamma$ nicht das vollständige integrale der Aequation

$$ay\,dy + y(3ax + b)\,dx + (ax^3 + bx^2 + cx + f)\,dx = 0.$$

Solches kann aber aus dem integrali particulari leicht gefunden werden, wenn man setzt $y = z - xx + \beta x + \gamma$.

Was das andere problema anlangt, welches jetzt in den Actis Lipsiensibus herauskommt, da die radii ex puncto dato emanantes post duplicem reflexionem in eben dasselbe Punct zurückkommen sollen, so hat das tentamen Ew. seine volle

Richtigkeit, und dienet, um die curvam infra axem constitutam zu finden, wenn die obere als bekannt angenommen wird. Die grösste Schwierigkeit aber beruhet darauf, dass beyde curvae eandem curvam continuam ausmachen, welcher Umstand von Ew. nicht in Betrachtung gezogen worden. Ich habe anfänglich die Solution auch auf eben diese Art tentirt, die formulae werden aber allzu weitläufig und verwirrt, als dass ich dieser letzten Bedingung hätte ein Genüge leisten können. Ich glaubte, dass die Annehmung einer Axe daran schuldig wäre, indem man wenig hinreichenden Grund hat, warum man vielmehr diese, als eine andere Linie für die Axe annehmen sollte. Daher habe ich diese Betrachtung völlig beiseit gesetzt und meine Solution folgendergestalt vorgenommen:

Lemma. Si (Fig. 12) ex foco C in curvam AM radii CM incidant, atque ex C in tangentem MP demittatur perpendiculum CP: vocatis $CM = y$; $CP = p$, erit longitudo radii reflexi $MO = \frac{pydy}{2ydp - pdy}$.

Problema. Circa datum punctum C describere curvam $AMmB$, ut radii ex C egressi post duplicem reflexionem in M et m in idem punctum C revertantur.

Solutio. Ad M et m ducantur tangentes MP, mp in easque ex C demittantur perpendicula CP, Cp. Vocentur $CM = y$, $CP = p$, $MP = q = \sqrt{(yy - pp)}$, item $Cm = Y$, $Cp = P$, $mp = -Q = -\sqrt{(YY - PP)}$. Sit MO radius reflexus, incidenti CM respondens, et mO radius reflexus, incidenti Cm respondens, erit per lemma: $MO = \frac{pydy}{2ydp - pdy}$ et $mO = \frac{PYdY}{2YdP - PdY}$ et $Mm = \frac{pydy}{2ydp - pdy} + \frac{PYdY}{2YdP - PdY}$. Bisecentur anguli CMm, CmM rectis ML, ml, quae erunt

normales ad curvam, ac propterea perpendiculis CP, Cp parallelae. Jam cum anguli MCP vel CML sit sinus $= \frac{q}{y}$, et cosinus $= \frac{p}{y}$, erit anguli dupli CMm sinus $= \frac{2pq}{yy}$, cosinus $= \frac{pp - qq}{yy} = \frac{2pp - yy}{yy}$, et anguli CmM sinus $= -\frac{2PQ}{YY}$ et cosinus $= \frac{PP - QQ}{YY} = \frac{2PP - YY}{YY}$. Ergo perpendiculum $CN = \frac{2pq}{y} = -\frac{2PQ}{Y}$ et $MN = \frac{2pp}{y} - y$ atque $mN = \frac{2PP}{Y} - Y$. Unde nascuntur hae duae aequationes:

I. $\frac{pq}{y} + \frac{PQ}{Y} = 0$ et II. $\frac{2pp}{y} - y + \frac{2PP}{Y} - Y = \frac{pydy}{2ydp - pdy} + \frac{PYdY}{2YdP - PdY}$ seu $\frac{pp}{y} + \frac{PP}{Y} = \frac{yydp}{2ydp - pdy} + \frac{YYdP}{2YdP - PdY}$.

Ad has aequationes simpliciores reddendas ex P et p in CM et Cm demittantur perpendicula PR et pr, et vocentur $CR = r$, $PR = s$, $Cr = R$ et $pr = -S$ quia in plagam oppositam vergit, eritque $r = \frac{pp}{y}$, $s = \frac{pq}{y}$, et ob $y = \frac{pp}{r}$ et $dy = \frac{2pdp}{r} - \frac{ppdr}{rr}$ erit $2ydp - pdy = \frac{p^3 dr}{rr}$ ideoque $\frac{yydp}{2ydp - pdy} = \frac{pdp}{dr} = r + \frac{sds}{dr}$ ob $pp = rr + ss$. Simili modo erit $R = \frac{PP}{Y}$, $S = \frac{PQ}{Y}$, $\frac{YYdP}{2YdP - PdY} = \frac{PdP}{dR} = R + \frac{SdS}{dR}$. Quibus valoribus substitutis binae aequationes solutionem continentes abeunt in has: I. $s + S = 0$,

II. $r + R = r + \frac{sds}{dr} + R + \frac{SdS}{dR}$, seu II. $\frac{sds}{dr} + \frac{SdS}{dR} = 0$.

Quodsi jam ponatur $s = t$ et $\frac{sds}{dr} = u$, erit $S = -t$ et $\frac{SdS}{dR} = -u$; quare, cum puncta M et m ad eandem curvam pertinere debeant, eandem relationem inter t et u atque inter $-t$ et $-u$ esse oportet; et quia s exprimitur per radicale $\sqrt{(pp - rr)}$, necesse est ut aequatio inter t et u ita sit comparata, ut non mutetur sive t et u capiantur negative sive affirmative. Si itaque pro relatione inter t und u assumatur hujusmodi aequatio $\alpha tt + \beta uu = aa$, seu $aa = \alpha tt + \beta uu + \gamma t^4 + \delta t^2 u^2 + \varepsilon u^4$ etc. semper prodibit curva quaesito satisfaciens. Assumta autem hujusmodi idonea aequatione inter t et u, erit $s = t$ et $\frac{sds}{dr} = \frac{tdt}{dr} = u$, unde fit $r = \int \frac{tdt}{u}$, $p = \sqrt{(rr+ss)}$ et $y = r + \frac{ss}{r}$. Sicque obtinetur relatio inter quemvis radium CM et respondens perpendiculum in tangentem CP, ex qua relatione curva construi potest.

Si pro aequatione inter t et u assumatur $tt + uu = aa$, erit $udu = -tdt$ et $r = b - u$, existente $s = t = \sqrt{(aa-uu)}$, unde $p = \sqrt{(aa + bb - 2bu)}$ et $y = \frac{pp}{r} = \frac{aa+bb-2bu}{b-u}$, seu ob $u = \frac{aa+bb-pp}{2b}$, erit $r = \frac{bb-aa+pp}{2b}$ et $y = \frac{2bpp}{bb-aa+pp}$ seu $pp = \frac{(bb-aa)y}{2b-y}$, quae aequatio praebet omnes ellipses, alterum focum in C habentes. Sumtis igitur aliis aequationibus inter t et u, supra descriptam indolem habentes, infinitae aliae curvae satisfacientes prodibunt, inter quas quoque curvae algebraicae reperientur, wie ich denn unter andern auch eine ordinis sexti gefunden habe.

Euler.

LETTRE LXXXII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Considérations ultérieures sur la courbe catoptrique.

St. Petersburg d. .. Julii 1745.

Ich weiss nicht eigentlich, ob mir bey Abgang meines letztern Schreibens schon bekannt gewesen, dass Ew. das Directorium der mathematischen Classe in der Königl Akademie der Wissenschaften erhalten, in welchem Fall ich Deroselben (dieses relativum gehet sowohl auf Ew. als auf die Akademie selbst) schon damals, wie ich es jetzo thue, dazu hätte gratuliren sollen. Das Absterben Dero Hn. Vaters habe zu allererst aus dem letzten Briefe vernommen, und wie den Verlust, so Sie hiedurch erlitten, von Herzen bedaure, so wünsche hingegen, dass Ew. ein gleiches Alter bey guter Gesundheit und allem Vergnügen erreichen mögen.

Für die mir communicirte Solution danke ich dienstlich. Ich zweifle nicht, dass dieselbe so kurz sey, als nur möglich; allein sie erfordert doch eine besondere Application, um alles recht einzusehen. Ohngeachtet nun zur Solution die consideratio unius puncti C (Fig. 13), aus welchem die radii ausgehen und wohin sie post duplicem reflexionem zurückkehren, gnugsam ist, so halte ich doch davor, dass ausser diesem, noch ein anderes punctum in allen dergleichen curvis, in eadem a centro distantia zugegen seyn muss, welches eben dieselbe Proprietät als das punctum C haben wird; dahero, wenn das problema folgendergestalt concipirt würde: Datis diametris curvae AB et DE, invenire in axe AB punctum C, ex quo omnes radii etc., so möchte ich gern sehen, wie dergleichen curva non-ellipsis von einer ellipsi differiren würde, denn ich zweifle sehr, ob eine curva, deren vier quadrantes nicht similes et aequales sind (wie in der ellipsi) zur Solution geschickt seyn könne. Ist aber die curva solchergestalt beschaffen, so kann man die Probe, ob eine aequatio data satisfaciret, auch folgendermaassen, nach Ew. Anleitung anstellen: Sit radius quicunque ex puncto C in curvam incidens $CD = y$, radius a curva reflexus (in axem) $DF = y'$, radius ab axe reflexus (ita ut ang. $CFD =$ ang. BFG) $FG = y''$, radius a curva reflexus $GC = y'''$. Requiritur ut spatium in axe interceptum CF inter y et y', item inter y'' et y''' sit idem.

Goldbach.

LETTRE LXXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches sur les séries. *P. S.* Courbe catoptrique.

Berlin d. 7 August 1845.

— — Ich habe seit einiger Zeit mit dem Hn. Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dergleichen diese ist

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ haben, ich aber das Gegentheil behauptet, weilen ich glaube, dass eine jegliche series einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwierigkeiten, welche dagegen gemacht worden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Namen der Summ beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wenn die

Summ durch eine würkliche Summirung herausgebracht würde: welche Idee bei den seriebus divergentibus nicht Statt findet. Da nun eine jegliche series aus der Evolution einer expressionis finitae entstehet, so habe ich diese neue Definition von der Summ einer jeglichen seriei gegeben:

Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

Der Herr Bernoulli hat diese Definition vollkommen approbirt, zweifelt aber noch, ob nicht öfters eben dieselbe series divergens aus verschiedener expressionum finitarum evolutione entstehen könne, also dass man nach dieser Definition verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein Exempel gegeben, ich glaube aber gewiss zu seyn, dass nimmer eben dieselbe series aus der Evolution zweyer wirklich verschiedener expressionum finitarum entstehen könne. Und hieraus folget dann unstreitig, dass eine jegliche series, sowohl divergens als convergens, einen determinirten Werth oder summam haben müsse. Dahero, wenn die Summ dieser seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. gefunden werden soll, so muss man den valorem derjenigen Formul anzeigen, aus deren Evolution diese series entstehet. Um diese zu finden, so stelle man sich eine krumme Linie vor, deren abscissa $= x$ und applicata $= y = \frac{1}{1 - lx}$. Da nun $l0 = -\infty$ und $l1 = 0$, so wird diese curva eine solche Form haben (Fig. 14), und die area derselben $APM = \int y\,dx = \int \frac{dx}{1 - lx}$ wird $= xy - 1xy^2 + 2xy^3 - 6xy^4 + 24xy^5 -$ etc. Setzt man nun $AP = x = 1$, so wird auch $y = 1$, und die area APM wird seyn $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. dahero der Werth dieser seriei der areae APM gleich seyn muss, welche nicht nur determinirt, sondern auch, wie aus der

Figur erhellet, etwas grösser ist als $\frac{1}{2}$. Einen solchen Werth habe ich auch durch verschiedene Methoden, wodurch ich dieselbe series in convergentes verwandelt habe, herausgebracht. Anjetzo aber kann ich beweisen, dass diese series gleich sey dieser Expression

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{1 + \cfrac{5}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

welche nicht nur stark convergirt, sondern auch limites continuo propiores angibt, intra quos valor contineatur. Denn wenn die summa seriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. gesetzt wird $= s$, so ist $s < 1$; $s > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;

$$s < \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 1}} = \frac{2}{3}; \quad s > \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + 2}}} = \frac{4}{7} \text{ etc.}$$

Hieraus habe ich nun gefunden, dass proxime sey

$$s = 0{,}5963475922.$$

Es wäre also zu untersuchen ob dieser Werth nicht etwa durch die quadraturam circuli oder logarithmos angegeben werden könnte. Auf gleiche Weise kann ich auch diese seriem generalem

$s = 1 - ma + m(m+n)a^2 - m(m+n)(m+2n)a^3 + \text{etc.}$ summiren, denn es ist

$$s = \cfrac{1}{1+\cfrac{ma}{1+\cfrac{na}{1+\cfrac{(m+n)a}{1+\cfrac{2na}{1+\cfrac{(m+2n)a}{1+\cfrac{3na}{1+\cfrac{(m+3n)a}{1+\cfrac{4na}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}$$

also ist $s < 1$; $s > \frac{1}{1+ma}$; $s < \frac{1+na}{1+(m+n)a}$;

$$s > \frac{1+(m+2n)a}{1+2(m+n)a+m(m+n)a^2} \text{ etc.}$$

Euler.

P. S. Meine vormals überschriebene Solution des problematis catoptrici habe seit der Zeit kürzer zusammengezogen und zum Gebrauch dergestalt eingerichtet, dass alle satisfacirende krumme Linien nicht nur leicht erkannt, sondern auch alle, welche algebraische sind, leicht angezeigt werden können. Ew. haben ganz Recht, dass alle diese Linien einen diameter nothwendig haben müssen, als AB (Fig. 15); es folget aber nicht, dass ausser diesen noch eine andere Linie, als EE die curvam in duas partes similes et aequales schneide. Um alle mögliche curvas zu finden und durch Generalformuln auszudrücken, so nehme man für v eine solche Function von u, welche verwandelt werde in $-v$, wenn für u gesetzt wird $-u$. Dergleichen Functionen sind u, u^3, u^5,

u^7, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^3}$ etc. und so daraus zusammengesetzt werden, als $\alpha u + \beta u^3 + \frac{\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^3}$ etc. Wenn nun für v eine solche functio ipsius u angenommen worden, so suche man $p = \frac{dv}{du}$, und daraus wird die curva folgendergestalt bestimmt werden. Man nehme die abscissam

$$CP = x = \frac{up^2(cc-uu)}{c(a+v)} - \frac{2p(cc-uu)}{c} - \frac{u(a+v)}{c},$$

so wird die applicata

$$PM = y = \pm\left(\frac{pp(cc-uu)}{c(a+v)} + \frac{2up}{c} - \frac{a-v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)}.$$

Setzt man nun $v = u$, so kommt die ellipsis heraus, deren focus in C. Denn da $v = u$, so wird $p = \frac{dv}{du} = 1$ und $x = -\frac{(aa+cc)u-2acc}{c(a+u)}$ und $y \; \frac{(cc-aa)\sqrt{(cc-uu)}}{c(a+u)}$. Wenn man nun u eliminirt, so bekommt man

$$aa(xx+yy) = (aa-cc-cx)^2.$$

Setzt man aber $v = \frac{cc}{u}$ und $c = a$, so wird $p = \frac{dv}{du} = -\frac{cc}{uu}$ und folglich

$$x = \frac{3a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{uu}$$

und

$$y = \frac{a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{u^3}\sqrt{(aa-uu)},$$

woraus sich die Figur der krummen Linie leicht bestimmen lässt. Wollte man aber u eliminiren und eine Aequation zwischen x und y suchen, so würde dieselbe, wofern sich nichts destruirt, auf 12 Dimensionen steigen.

Uebrigens ist bey den vorgegebenen Generalformuln zu merken, dass daraus die Länge des radii

$$CM = \frac{pp(cc-uu)}{a+v} + a + v,$$

wodurch die Construction nicht wenig erleichtert wird. Wenn ferner auf diese Art das punctum primae reflexionis M bestimmt wird, so darf man nur, um das punctum alterius reflexionis N zu finden, setzen $u = -u$, da denn v in $-v$ verwandelt wird, p aber den vorigen Werth behält. Es wird nehmlich: $CQ = -\frac{upp(cc-uu)}{c(a-v)} - \frac{2p(cc-uu)}{c} + \frac{u(a-v)}{c}$ und

$$QN = \pm\left(\frac{pp(cc-uu)}{c(a-v)} - \frac{2up}{c} - \frac{a+v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)};$$

$$CN = \frac{pp(cc-uu)}{a-v} + a - v.$$

LETTRE LXXXIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets. Réponse à la précédente. Méthode de transformer toutes sortes de séries divergentes en convergentes.

Sans date (St. Petersburg d. 25. Sept. 1745.)

Wenn ich (Fig. 16) das spatium, quod inter radium incidentem et reflexum in diametro intercipitur, CR, nach Ew. formulis exprimire, so wird selbiges in der ellipsi constans seyn, in den andern curvis aber jederzeit solche limites haben, dass wenn CO die abscissa respondens applicatae maximae OE ist, das spatium interceptum $CR = 2CO$ zwischen diesen limitibus begriffen sey. Es lässet sich zwar dieses spatium interceptum durch die Aequation

$$CR = \frac{CP.NQ + MP.CQ}{MP + NQ}$$

generaliter leicht bestimmen, aber in der Application auf Ew. formulas scheinet sie mir etwas weitläufig zu werden.

In demjenigen, was Ew. von den seriebus divergentibus schreiben, bin ich völlig Dero Meinung. So viel ich mich erinnere, sind dergleichen series von einigen mathematicis darum verworfen worden, weil sie aus einer divisione praepostera entstehen; allein zu geschweigen, dass man selbige nach Belieben ohne einige Division formiren kann, so lassen sich auch die summae auf unterschiedene Arten finden, wenn man diese series terminorum signis alternantium in series terminorum mere affirmativorum verwandelt. Ich erinnere mich nicht, ob etwa schon in den Comment. Petrop. einer Methode Erwähnung geschehen, die in Folgendem bestehet: Datae seriei $A \ldots a - \beta + \gamma - \delta +$ etc. singuli termini fiant aequales singulis terminis seriei

$B \ldots a - \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1.3}{2.4}(c-2b+a) - \frac{1.3.5}{2.4.6}(d-3c+3b-a) +$ etc.,

hoc est $a = \alpha$, $b = \alpha + 2\beta$, $c = \frac{3\alpha + 12\beta + 8\gamma}{1.3}$, etc. erit series A aequalis termino, qui respondet exponenti $\frac{1}{2}$ in serie $C \ldots a + b + c + d +$ etc. Sumantur termini reciproci seriei C et fiat series $D \ldots \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} +$ etc. erit terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ in serie D aequalis seriei

$$E \ldots \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{c} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a}\right) - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{d} - \frac{3}{c} + \frac{3}{b} - \frac{1}{a}\right) + \text{etc.}$$

Quodsi jam summa seriei E ponatur $= p$, dico summam seriei A esse $= \frac{1}{p}$, unde sequitur summam seriei $2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. esse $= 1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{14} + \frac{29}{210} + \text{etc.}\right)$.

Es ist aber auch die series $2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. gleich dieser $1 - 2 + 9 - 48 + 300 - 2160 +$ etc., in welcher alle termini, affirmative considerati, diese legem progressionis haben: Sit exponens terminorum $n - 2$, terminus illi exponenti respondens A, summa omnium terminorum usque ad terminum A exclusive $= S$, erit terminus sequens $B = nA + S$. Si v. gr. dato termino tertio $= 9$, quaeratur quartus, erit exponens termini dati $n - 2 = 3$, $n = 5$, et summa omnium terminorum praecedentium $1 + 2 = 3 = S$, ergo terminus quartus $= nA + S = 5.9 + 3 = 48$. Die summa dieser seriei aber wird nach voriger Methode also exprimiret $1 : (1 + \frac{2}{3} + \frac{13}{55} +$ etc.), allwo die ersten drey termini des numeratoris viel weiter gehen, als in der vorher angegebenen summa, ohngeachtet beyde summae einander gleich seyn müssen.

Goldbach.

LETTRE LXXXV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Tables astronomiques pour le soleil et la lune. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 23. October 1745.

Ew. hatten vergessen in Dero letztem Schreiben das Datum beyzusetzen, daher ich eigentlich nicht weiss, wie lang ich dasselbe unbeantwortet gelassen, denn da ich anjetzo endlich neue tabulas astronomicas pro Sole et Luna zu Stande gebracht, so habe ich seit einiger Zeit so viel mit Rechnungen zu thun gehabt, dass ich an kein Briefschreiben gedenken konnte. Nunmehro bin ich zwar fertig, allein wenn ich der Herren Pariser Astronomen Gutachten und observationes darüber werde erhalten haben, so dürfte darin noch hin und wieder etwas zu ändern vorfallen.

Aus meinen formulis für die curvas, quae radios e foco emissos eodem reflectant, wird das spatium CR (Fig. 16)

sehr leicht und kurz ausgedrückt, ungeacht der calculus, um solches zu finden, wie Ew. angemerket haben, ziemlich weitläufig wird. Denn, wenn v eine solche Function von u andeutet, quae posito $-u$ loco $+u$ ipsa in sui negativam $-v$ abeat, so ist

$$CP = \frac{u(a+v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} - \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)};$$

$$PM = \left(\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)} + \frac{2udv}{du} - a - v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$$

und für das punctum N

$$CQ = -\frac{u(a-v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a-v)};$$

$$QN = \left(\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)} - \frac{2udv}{du} - a + v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}.$$

Wenn man nun diese expressiones in aequatione

$$CR = \frac{CP.NQ + MP.CQ}{MP + NQ}$$

substituirt, so findet man $CR = \frac{2cdv}{du}$, woraus erhellet, dass dieses spatium in keinem andern Fall constans sey, als wenn $v = au$, woraus die ellipsis entspringt. Wo aber die applicata maxima sey, lässt sich generaliter nicht bestimmen, noch zwischen dem Ort derselben und dem spatio CR ein Verhältniss entdecken.

Ew. höchst sinnreiche Methode alle series divergentes in convergentes zu verwandeln, indem Dieselben demonstrirt, dass, wenn

$$s = a + n(b-a) + \frac{n(n-1)}{1.2}(c - 2b + a)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(d - 3c + 3b - a) + \text{etc.},$$

so sey

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + n\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{1\ 2}\left(\frac{1}{c} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a}\right)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{d} - \frac{3}{c} + \frac{3}{b} - \frac{1}{a}\right) + \text{etc.}$$

ist mir sehr wohl bekannt gewesen, und dieselbe weiset freylich ganz klar, dass keine series so divergens seyn könnte, deren summa nicht immer durch eine seriem convergentem ausgedrückt werden könne. Diejenigen aber, welche die divisionem praeposteram nicht zulassen wollen, werden hier ebenfalls Einwendungen machen, dass man supponire, man komme zuletzt auf differentias constantes oder evanescentes; allein alle dergleichen Einwürfe werden durch meine obgemeldte definitionem summae cujusque seriei leicht gehoben. Für die seriem $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. findet man auch auf diese Art bald den valorem prope verum. Ich glaube aber, dass es sehr schwer seyn würde, auf diese Art den valorem summae nur auf $\frac{1}{1000}$ genau zu bestimmen; denn, ungeacht anfänglich die termini seriei conversae affirmativi werden, so kommen doch auch bald negativi zum Vorschein, und alsdann nehmen auch die termini nicht mehr merklich ab. Auf die von mir letzt überschriebene Art aber hat man die Approximation in seiner Gewalt und kann die Summ in Decimal-Fractionen so weit genau finden als man will.

Euler.

LETTRE LXXXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Courbe catoptrique. Spéculation sur les nombres π et $\sqrt{2}$. Nouvelle série.

St. Petersburg d. 9 Nov. 1745.

Aus dem spatio CR (Fig. 16), so Sie $= \frac{2cdv}{du}$ gefunden, lässt sich die applicata maxima ohne Schwierigkeit bestimmen, wenn man setzet $CP = \frac{CR}{2}$ und den valorem u, per a et c expressum, in der formula PM substituiret, wobey denn merkwürdig ist, dass die quantitas u, wenn das differentiale ipsius $PM = 0$ gesetzet wird, denselben valorem haben muss, den es ex aequatione $CP = \frac{CR}{2}$ bekömmt. Ingleichen, wenn man den radium MR suchen wollte, welcher perpendiculariter ad axem reflectiret wird, so müsste (weil alsdann die puncta P, Q et R in eines zusammenfallen) die quantitas u in diesen dreyen aequationibus $CP = CR$, $PM = QN$ und $CP =$

CQ einerley valorem haben. In dem casu, wo $v = u^3$, finde ich aus der aequatione $PM = \frac{CR}{2}$, $2u^3 - 3ccu - a = 0$, und in demselben casu, wenn $v = u^3$, finde ich, pro radio perpendiculariter ad axem reflexo, aus der aequatione $CP = CR$, $u = \left(\frac{a+3c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, welcher valor von u dann auch aus den andern beyden aequationibus $PM = QN$ und $CP = CQ$ herauskommen muss; so ich aber lieber glauben, als mich durch die Erfahrung davon convinciren will. Ich werde auch von diesem genere curvarum einen bessern Begriff bekommen, wenn Ew. mir melden wollen, durch was für Linien die quantitates constantes a et c item die variabilis u, seorsim consideratae, in der curva exprimiret werden; indessen kann ich beweisen, dass die curva in allen Fällen contradictoria wird, wo v eine solche functionem ipsius u andeutet, dass $\frac{dv}{a+v}$ grösser wird, als $\frac{du}{c+u}$.

Weil kein Zweifel ist, dass in dem numero $\frac{31415\ldots}{10000\ldots}$, so die circumferentiam circuli data diametro 1 exprimiret, eine jede von den Ziffern des numeratoris ihre Plätze nach einer gewissen, obwohl sehr schweren und undeutlichen Ordnung einnimmt, und ein grosser Theil dieser Schwierigkeit aus der Abwechselung von zehnerley Ziffern entstehet, so könnte man wenigstens diese letztere sehr erleichtern, wenn man setzte circumferentia $=$

$$m + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \frac{d}{10000} + \text{etc.},$$

allwo m pro lubitu so angenommen werden kann, dass circumf. $- m < \frac{1}{9}$, hernach aber ein jeder von den numeratoribus a, b, c, etc. entweder 0 oder 1 würde, welches

allezeit möglich ist. Wenn nun solchergestalt die series, deren numeratores alle entweder 0 oder 1 sind, auf eine gewisse Anzahl von terminis continuiret werden, so stünde zu versuchen, ob sich nicht unter diesen 0 und 1 eine gewisse Ordnung zeigen möchte? Dass ein ordo numerorum circulantium herauskommen sollte, ist zwar nicht zu vermuthen, weil sonst der ganze numerus rationalis seyn müsste; es kann aber nichts desto weniger progressiones non circulantes geben, die eine offenbare Ordnung halten, als

$$0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + \text{etc.}$$

und unzählige andere. Wenn nun, in praesenti casu ein ordo certa lege variabilis entdecket würde, so glaubte ich, dass die quadratura circuli in numeris decimalibus noch viel näher gefunden wäre, als es nach der gewöhnlichen extractione radicis möglich ist $\sqrt{2}$ zu finden. Man könnte auch $\sqrt{2}$ so exprimiren $\frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} + \frac{d}{8} + \text{etc.}$, dass a, b, c, etc. allezeit 0 oder 1 würden, und hier sollte ich fast glauben, dass sich bald eine Ordnung zeigen möchte.

Nachfolgende series scheinet einige Attention zu meritiren

$$\frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5.2^2} \cdot \frac{1}{6}\pi^4 + \frac{1}{1.2\ldots6.7.2^4} \cdot \frac{1}{6}\pi^6 + \frac{1}{1.2\ldots8.9.2^6} \cdot \frac{5}{6}\pi^8 + \frac{1}{1.2\ldots10.11.2^8} \cdot \frac{691}{210}\pi^{10} + \text{etc.} = 4 - \pi.$$

Goldbach.

LETTRE LXXXVII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la précédente.

Berlin d. 30. November 1745.

— — Ueber das problema catoptricum nehme die Freyheit Ew. meine Solution hiemit zu übersenden, deren analysis alle Umstände hinlänglich erläutern wird*). — Ew. Vorschlag, die Expression 3,1415926535 etc. auf eine bequeme Art vorzustellen, dass daraus zugleich die lex progressionis erhelle, läuft darauf hinaus, dass man eine bekannte Zahl m ausfindig machen soll, deren Cyphern in infinitum mit den obigen entweder einerley oder nur um 1 kleiner wären, denn solchergestalt würde der Rest $\pi - m$ durch eine solche Decimal-Fraction ausgedrückt werden, deren alle Figuren entweder 0 oder 1 seyn würden. Ich sehe aber noch keine Methode ein, wie man nur zur Erfindung der ge-

*) Voir ci-dessous.

meldten Zahl m gelangen könnte. Ich wollte also vielmehr die Differenz $\pi - m$ als bekannt annehmen, als z. Exempel $\pi - m = 0{,}01001000100001$ etc. so würde

$$m = 3{,}13158265258978,$$

und nun müsste man sehen, ob diese Zahl durch eine expressionem irrationalem finitam ausgedrückt werden könnte.

Ich erinnere mich auch schon einmal einer gewissen leichten Operation Meldung gethan zu haben, wodurch man Zahlen bekommt, deren Werth vielleicht nullo modo in finitis ausgedrückt werden kann. Ich verfahre nehmlich wie in der ordinären Division, nur dass ich bey jeder Operation den divisorem um 1 vermehre, wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

1	100000000000000000000	04647827439076 39
2	10	
3	20	
4	20	
5	40	
6	50	
7	20	
8	60	
9	40	
10	40	
11	100	
12	10	
13	100	
14	90	
15	60	
16	150	
	etc.	

Wenn nun diese Zahl 0,464782743907639 etc. zur Peripherie des Zirkuls eine bekannte Verhältniss hätte, so hielte ich die Peripherie so gut als gefunden, indem dieselbe mit leichter Mühe auf so viel Figuren, als man immer verlangt, gefunden werden könnte. Man kann auch hierin auf unendlich vielerley Weise variiren und die divisores nach Belieben verändern.

Nach der arithmetica dyadica wird $\sqrt{2}$ folgendergestalt ausgedrückt gefunden $\sqrt{2} = 1{,}41421356236$, so operire man continuo duplando hinter der Verticallinie folgendergestalt:

1	41421356236
0	82842712472
1	65685424944
1	31370849888
0	62741699776
1	25483399552
0	50966799104
1	01933598208
0	03867196416
0	07734392832
0	15468785664

Die vor der Verticallinie herausgekommenen Zahlen 0 et 1 geben die gesuchte fractionem dyadicam, nehmlich

$$\sqrt{2} = 1{,}0110101000001001111001100110011111111001,$$

worin sich aber keine lex wahrnehmen lässt.

Die von Ew. überschriebene series ist allerdings sehr merkwürdig. Dieselbe kann folgendergestalt generaler aus-

gedrückt werden: Es sey die tangens dieses Winkels $\frac{1}{n}\,90^0 = t$, so wird

$$1 - \frac{\pi}{2nt} = \frac{1}{1.2.3n^2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{1.2\ldots5n^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^4 + \frac{1}{1.2\ldots7n^6}\cdot\frac{1}{6}\pi^6 + \frac{1}{1.2\ldots9n^8}\cdot\frac{3}{10}\pi^8 + \text{etc.}$$

Setzt man nun $n = 2$, so kommt Ew. series heraus.

Euler.

(Mémoire annexé à cette lettre.)

Solutio problematis in Actis Lipsiensibus

A. 1745 *propositi.*

Circa datum focum C (Fig. 17) describere curvam $AEBF$, ut omnes radii ex C emissi post binas reflexiones in M et N factas, in ipsum punctum C revertantur.

I. *Lemma* 1. Determinare legem reflexionis, quam radii ex puncto C (Fig. 18) emissi ad curvam quamcunque EMm patiuntur.

Solutio. Consideretur radius incidens quicunque CM, et ducatur ad curvae punctum M tangens MT, in quam ex C perpendiculum demittatur CT, cui parallela MR erit normalis ad curvam. Sumto igitur angulo $RMO = CMR$, erit recta MO radius reflexus. Ponatur $CM = z$ et angulus $CMT = \varphi$, erit (posito sinu toto $= 1$) $CT = z \sin\varphi$ et $MT = z\cos\varphi$. Ac demisso ex T in CM perpendiculo TS, ob ang. $CTS = CMT = \varphi$ erit $CS = z\sin^2\varphi$ et $TS = z\sin\varphi\cos\varphi$. Jam ducatur radius proximus $Cm = z + dz$, eique conveniens reflexus mOo priorem radium reflexum MO secans in O, erit O punctum in caustica. Centro C describatur arculus MN, et cum in triangulo MNm ad N rectangulo sit $mN = dz$, et angulus $MmN = \varphi$, erit $mN = dz = Mm\cos\varphi$, ideoque $Mm = \frac{dz}{\cos\varphi}$ et $MN = \frac{dz\sin\varphi}{\cos\varphi}$, unde fit angulus $MCm = \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$. In puncto m ducatur pariter tangens mt ad eamque normalis mR, erit angulus $Cmt = \varphi + d\varphi$; at est $CmT = CMT - MCm = \varphi - \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$, unde fit $Tmt = MRm = d\varphi + \frac{dz\sin}{z\cos\varphi}$. Porro est $RMO = CMR = 90^\circ - \varphi$ et $RmO = 90^\circ - \varphi - d\varphi$. Quare ob $M\nu m = RMO + MRm = RMO + MOm$, fiet $MOm = RMO + MRm - RmO = 90^\circ - \varphi + d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi} - 90^\circ + \varphi + d\varphi$, seu $MOm = 2d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$. Centro O describatur arculus mn, et cum sint triangula MNm et mnM ob angulos ad N et n rectos, et $mMn = MmN$ aequalia et similia, erit $Mn = mN = dz$ et $mn = MN = \frac{dz\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Unde habebitur quoque ang. $MOm = \frac{mn}{mO} = 2d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$, ex quo erit

$$mO = \frac{mn.z\cos\varphi}{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi} = \frac{zdz\sin\varphi}{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi}.$$

Sicque ob $mO = MO$ habemus radium reflexum

$$MO = \frac{zdz\sin\varphi}{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi}.\ \text{Q. E. I.}$$

II. *Coroll.* 1. Cum sit angulus

$$MOm = 2d\varphi + \frac{dz\sin\varphi}{z\cos\varphi} = \frac{2zd\varphi\cos\varphi + dz\sin\varphi}{z\cos\varphi}$$

erit $MOm = \frac{2zd\varphi\sin\varphi\cos\varphi + dz\sin^2\varphi}{z\sin\varphi\cos\varphi}$. At hujus fractionis numerator est differentiale ipsius $z\sin^2\varphi = CS$, unde ob $z\sin\varphi\cos\varphi = TS$, erit angulus $MOm = \frac{d.CS}{TS}$.

III. *Coroll.* 2. Quodsi ergo vocemus $CS = r$ et $TS = s$, erit angulus $MOm = \frac{dr}{s}$. Tum vero erit $CT = \sqrt{(rr+ss)}$, $MT = \frac{s}{r}\sqrt{(rr+ss)}$ et $CM = z = \frac{rr+ss}{r}$, unde $dz = dr + \frac{2sds}{r} - \frac{ssdr}{rr}$. Hinc ob $\sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{(rr+ss)}}$ et $\cos\varphi = \frac{s}{\sqrt{(rr+ss)}}$, erit $mn = \frac{dz\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{rdr}{s} + 2ds - \frac{sdr}{r}$, atque $MO = \frac{mn}{MOm} = r + \frac{2sds}{dr} - \frac{ss}{r} = \frac{2sds}{dr} + \frac{rr-ss}{r}$.

IV. *Coroll.* 3. Ponatur radius reflexus $MO = w$, erit proximus $mo = w + dw$, et particula Oo erit elementum curvae causticae. Est vero $Oo = mo - nO = mo - MO + Mn = mo - MO + mN = dw + dz$, ideoque longitudo curvae causticae erit $= w + z \pm C = CM + MO \pm C$, uti constat.

V. *Coroll.* 4. Retentis autem denominatoribus $CS = r$ et $TS = s$, quarum relatione natura curvae EM definitur, erit $\sin MCT = \frac{s}{\sqrt{(rr+ss)}}$ et $\cos MCT = \frac{r}{\sqrt{(rr+ss)}}$. Quoniam vero est $CMO = 2CMR = 2MCT$, erit $\sin CMO = \frac{2rs}{rr+ss}$ et $\cos CMO = \frac{rr-ss}{rr+ss}$. Unde cum in triangulo CMO dentur latera CM et MO cum angulo intercepto CMO, tertium latus CO ejusque positio determinabitur.

VI. *Lemma* 2 Invenire relationem inter bina curvae quaesitae puncta M et m (Fig. 19) ad quae radius ex C reflexus eodem revertitur.

Solutio. Emittatur ex C radius CM, qui post primam reflexionem in m, hincque secunda reflexione iterum in C reflectatur. Manifestum est ejusmodi proprietatem reciprocam inter puncta M et m intercedere, ut radius quoque secundum directionem Cm emissus post binas reflexiones in m et M factas in C revertatur. Ducantur ergo ad M et m tangentes MT et mt, in quas ex C demittantur perpendicula CT et Ct, atque ex T et t porro perpendiculares TS et ts in radios CM et Cm. Jam ponatur ut ante $CS = r$, $TS = s$, atque $Cs = R$ et $ts = -S$, quia haec linea in partem oppositam cadit. Sitque O punctum in caustica. Erit ex ante inventis

$CT = \sqrt{(rr+ss)}$, $MT = \frac{s}{r}\sqrt{(rr+ss)}$ et $CM = \frac{rr+ss}{r}$	$Ct = \sqrt{(RR+SS)}$, $mt = -\frac{S}{R}\sqrt{(RR+SS)}$ et $Cm = \frac{RR+SS}{R}$
$\sin CMO = \frac{2rs}{rr+ss}$, $\cos CMO = \frac{rr-ss}{rr+ss}$	$\sin CmO = \frac{2RS}{RR+SS}$, $\cos CmO = \frac{RR-SS}{RR+SS}$
$MO = \frac{2sds}{dr} + \frac{rr-ss}{r}$	$mO = \frac{2SdS}{dR} + \frac{RR-SS}{R}$.

Ex C in Mm demittatur perpendiculum CV, eritque

$CV = 2s$, $MV = \frac{rr-ss}{r}$	$CV = -2S$, $mV = \frac{RR-SS}{R}$
$OV = MV - MO = -\frac{2sds}{dr}$	$OV = mO - mV = \frac{2SdS}{dR}$
$CO = \frac{2s\sqrt{(dr^2+ds^2)}}{dr}$;	$CO = -\frac{2S\sqrt{(dR^2+dS^2)}}{dR}$,
$\tang COM = \frac{dr}{ds}$	$\tang COm = -\frac{dR}{dS}$.

Ex quibus colligitur fore $CV = 2s = -2S$, ideoque $S = -s$,

seu $ts = TS$. Deinde $OV = \frac{-2sds}{dr} = \frac{2SdS}{dR}$, ergo, ob $S = -s$ et $dS = -ds$, fit $-\frac{1}{dr} = \frac{1}{dR}$ atque $dR + dr = 0$, unde integrando oritur $R + r = 2a$; ita ut si ponatur $r = a + v$, fiat $R = a - v$. Cum igitur ex puncto M reperiatur punctum ipsi ex reflexione respondens m, si valor ipsius $TS = s$ statuatur negativus, hocque facto valor lineae $CS = r = a + v$ abeat in $Cs = R = a - v$, manifestum est quantitatem v ejusmodi fore functionem ipsius s, quae facto s negativo ipsa in sui negativam abeat, cujusmodi functiones equidem impares appellare soleo, quia potestates imparium exponentium ipsius s hac proprietate gaudent. Si igitur sumatur v hujusmodi functio impar ipsius s quaecunque, statuaturque $TS = s$ et $CS = a + v$, habebitur curva conditioni problematis satisfaciens. Q. E. I.

VII. *Coroll.* 1. Omnes igitur curvae problemati satisfacientes ita erunt comparatae, ut sumta pro v functione quacunque impari ipsius s, sit $TS = s$, $CS = a + v$, $CT = \sqrt{(ss + (a+v)^2)}$, $MT = \frac{s\sqrt{(ss+(a+v)^2)}}{a+v}$, $CM = a + v + \frac{ss}{a+v}$.

VIII. *Coroll.* 2. Positio autem radii reflexi Mm ita definietur ut sit $\sin CMO = \frac{2(a+v)s}{ss+(a+v)^2}$, $\cos CMO = \frac{(a+v)^2 - ss}{(a+v)^2+ss}$, $MO = \frac{2sds}{dv} + a + v - \frac{ss}{a+v}$, ubi O est punctum in caustica, unde longitudo curvae causticae erit $= CM + MO \pm C$ $= 2(a+v) + \frac{2sds}{dv} \pm C$.

IX. *Coroll.* 3. Si porro ex C in radium reflexum Mm demittatur perpendiculum CV, erit $CV = 2s$, $MV = a + v - \frac{ss}{a+v}$, $OV = \frac{-2sds}{dv}$, $CO = \frac{2s\sqrt{(dv^2+ds^2)}}{dv}$ et $\tang COM = \frac{dv}{ds}$.

X. *Coroll.* 4. Pro altero autem reflexionis puncto m erit $ts = -s$, $Cs = a - v$, $Ct = \sqrt{(ss + (a-v)^2)}$, $mt = \frac{-s\sqrt{(ss+(a-v)^2)}}{a-v}$ et $Cm = a - v + \frac{ss}{a-v}$, atque

$$mO = \frac{-2sds}{dv} + a - v - \frac{ss}{a-v},$$

unde fit radius reflexus totus $Mm = 2a - \frac{2ass}{aa-vv}$.

XI. *Problema.* Dato puncto C invenire omnes curvas AMB ita comparatas, ut radii ex C emissi post duplicem reflexionem in idem punctum C reflectantur.

Solutio. Consideretur radius quicunque CM (Fig. 20) ductaque tangente MT et ut ante rectis CT et TS, vocetur $TS = s$ et $CS = a + v$, habebiturque curva satisfaciens dummodo pro v capiatur functio impar ipsius s. In radio ergo reflexo $M(M)$, qui causticam in O tangat, erit

$$\sin CMO = \frac{2(a+v)s}{(a+v)^2+ss}, \quad \cos CMO = \frac{(a+v)^2 - ss}{(a+v)^2+ss},$$

$$CM = a + v + \frac{ss}{a+v}, \quad MO = \frac{2sds}{dv} + a + v - \frac{ss}{a+v},$$

$$CO = \frac{2s\sqrt{(dv^2+ds^2)}}{dv} \text{ atque } \operatorname{tang} COM = \frac{dv}{ds}.$$

His praemissis sumatur recta quaecunque per C ducta, AB, pro axe, quae radium reflexum $M(M)$ in R secet, sitque angulus $CRM = \omega$. Cum igitur pro altero reflexionis puncto (M) iste angulus fiat $CR(M) = \omega - 180^\circ$, tam sinus quam cosinus anguli ω fieri debet negativus, si punctum M in (M) transferatur, hoc est si s fiat negativum. Ponatur igitur $\cos\omega = \frac{u}{c}$, erit $\sin\omega = \frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$ et $d\omega = \frac{-du}{\sqrt{(cc-uu)}}$ debebitque u esse functio impar ipsius s, ut posito s negativo, abeat in $-u$: hocque casu quoque $\sqrt{(cc-uu)}$ ob signum radicale ambiguum induet valorem negativum. Ducatur radius reflexus proximus mOr, erit $Crm = \omega + d\omega$, ideoque

$d\omega = MOm$. At supra (§ III) invenimus angulum $MOm = \frac{dr}{s} = \frac{dv}{s}$ ob $r = a + v$, unde fiet $d\omega = \frac{dv}{s} = \frac{-du}{\sqrt{(cc-uu)}}$: erit ergo $s = \frac{-dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$. Quia igitur pro altero puncto reflexionis (M), v abit in $-v$, u in $-u$, et $\sqrt{(cc-uu)}$ in $-\sqrt{(cc-uu)}$, uti u erat functio impar ipsius s, ita nunc vicissim tam s quam v erunt functiones impares ipsius u. Jam in triangulo CRM, ob omnes angulos cum latere $CM = a + v + \frac{ss}{a+v} = a + v + \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}$ datos, erit $\sin CRM : CM = \sin CMO : CR$ seu $CR = \frac{CM \sin CMO}{\sin CRM} = \frac{CV}{\sin CRM} = \frac{2cs}{\sqrt{(cc-uu)}} = \frac{-2cdv}{du}$, ob $s = \frac{-dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$. Sicque erit $CR = \frac{-2cdv}{du}$, quae pro puncto (M) eundem retinet valorem uti requiritur. Deinde erit $RV = \frac{-2udv}{du}$, hincque $MR = a + v - \frac{ss}{a+v} - \frac{2udv}{du} = a + v - \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}$. Demittatur nunc ad axem ACB applicata MP, erit $MP = MR \sin\omega =$

$$\left(a + v - \frac{2udv}{du} - \frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c},$$

ubi ex signo radicali $\sqrt{(cc-uu)}$ patet axem ACB simul fore curvae diametrum orthogonalem. Tum vero erit

$$RP = MR\cos\omega = \frac{u(a+v)}{c} - \frac{2uudv}{cdu} - \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)}$$

et

$$CP = \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)} - \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} - \frac{u(a+v)}{c}.$$

Positis ergo coordinatis orthogonalibus $CP = x$, $PM = y$, si pro v capiatur functio quaecunque impar ipsius u, omnes curvae problemati satisfacientes in sequentibus formulis continebuntur:

$$x = \frac{-u(a+v)}{c} - \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a+v)};$$

$$y = \left(a+v-\frac{2udv}{du}-\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}.$$

Unde fit $CM = a+v+\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a+v)}$. Si ergo pro v capiatur functio algebraica ipsius u, curva quoque erit algebraica. Sicque tot, quot libuerit, curvas algebraicas exhibere licet. Q. E. I.

XII. *Coroll.* 1. Ad statum figurae expedit quantitatem v sumi negativam, quo facto erit per formulas hactenus inventas:

$$CP = x = \frac{-u(a-v)}{c} + \frac{2dv(cc-uu)}{cdu} + \frac{udv^2(cc-uu)}{cdu^2(a-v)}$$

$$= \frac{-u(a-v)}{c}\left(1-\frac{dv(cc-uu+c\sqrt{(cc-uu)})}{udu(a-v)}\right)$$

$$\left(1-\frac{dv(cc-uu-c\sqrt{(cc-uu)})}{udu(a-v)}\right)$$

$$PM = y = \left(a-v+\frac{2udv}{du}-\frac{dv^2(cc-uu}{du^2(a-v)}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$$

$$= \left(a-v-\frac{(c-u)dv}{du}\right)\left(a-v+\frac{(c+u)dv}{du}\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c(a-v)}$$

$$CM = z = a-v+\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$$

factisque u et v itemque $\sqrt{(cc-uu)}$ negativis, hae formulae praebebunt alterum reflexionis punctum (M).

XIII. *Coroll.* 2. Reliquae autem lineae et anguli in figura expressi erunt $TS = s = \frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$, $CS = r = a-v$, $CT = \sqrt{(rr+ss)}$ et $MT = \frac{s}{r}\sqrt{(rr+ss)}$, $CR = \frac{2cdv}{du}$, $MR = a-v+\frac{2udv}{du}-\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$ et $\cos CRM = \frac{u}{c}$, $\sin CRM = \frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$. Porro $CV = \frac{2dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$, $RV = \frac{2udv}{du}$.

XIV. *Coroll.* 3. Caustica autem, in qua punctum O existit, ita definietur: Cum sit $MO = a-v-\frac{ss}{a-v}-\frac{2sds}{dv}$ et $MR = a-v+\frac{2udv}{du}-\frac{ss}{a-v}$, erit

$$RO = \frac{2sds}{dv}+\frac{2udv}{du} = \frac{2ds\sqrt{(cc-uu)}+2udv}{du}$$

ob $s = \frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$: hincque $OQ = \frac{2ds(cc-uu)+2udv\sqrt{(cc-uu)}}{cdu}$ et $RQ = \frac{2uds\sqrt{(cc-uu)}+2uudv}{cdu}$, ideoque

$$CQ = \frac{2(cc-uu)dv-2uds\sqrt{(cc-uu)}}{cdu}.$$

Tum vero longitudo curvae causticae

$$= 2(a-v)-\frac{2ds\sqrt{(cc-uu)}}{du} \pm C.$$

XV. *Coroll.* 4. Totus vero radius reflexus erit $M(M) = 2a-\frac{2ass}{aa-vv}$. Quare ob $s = \frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{du}$, erit

$$M(M) = 2a-\frac{2adv^2(cc-uu)}{du^2(aa-vv)}.$$

Proprietates ergo harum curvarum sunt sequentes:

XVI. Cum recta ACB simul sit curvae diameter, ita ut pars AMB aequalis sit et similis parti $A(M)B$, bini vertices A et B reperientur, faciendo $y = 0$, quod fit si vel $u = c$ vel $u = -c$. Quibus casibus, ob angulum CRM vel $= 0$ vel $= 180°$, axis AB ad curvam erit normalis. Fiat ergo primo $u = c$ sitque $v = e$, erit $x = -a+e$, ideoque $AC = a-e$. Deinde sit $u = -c$, erit $v = -e$, atque $x = a+e$, ita ut pro altero vertice B sit $BC = a+e$ unde totus axis transversus erit $AB = 2a$.

XVII. Fieri interdum potest, ut applicata y aliis quoque casibus evanescat, scilicet si $a-v+\frac{2udv}{du}-\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)} = 0$,

quod evenit si $a-v=-\frac{udv}{du}\pm\frac{cdv}{du}$. Hoc est si $\frac{dv}{du}=\frac{a-v}{\pm c-u}$. Hoc autem casu erit $x=$
$\frac{-u(a-v)}{c}+\frac{2(\pm c+u)(a-v)}{c}+\frac{u(\pm c+u)(a-v)}{c(\pm c-u)}=\frac{2c(a-v)}{\pm c-u}=\frac{2cdv}{du}$. Quodsi ergo hujusmodi casus locum habet, erit simul $CP=CR$, quod quidem facile patet.

XVIII. Quantitas applicatae CE in ipso foco C innotescet ponendo $x=0$. Fit autem $x=0$ si

$$a-v=\frac{dv(cc-uu\pm c\sqrt{(cc-uu)})}{udu}.$$

Hoc autem valore substituto fiet $CE=y=\frac{2cdv\sqrt{(cc-uu)}}{udu}$, qui valor prodit, si $a-v=\frac{dv(\sqrt{(cc-uu)}\pm c)\sqrt{(cc-uu)}}{udu}$ seu si $\frac{dv\sqrt{(cc-uu)}}{udu}=\frac{a-v}{\sqrt{(cc-uu)}\pm c}=\frac{-(a-v)(\sqrt{(cc-uu)}\mp c)}{uu}$. Erit ergo quoque $CE=\frac{-2c(a-v)(\sqrt{(cc-uu)}\mp c)}{uu}$.

XIX. Si quaeretur locus, ubi axis reflexus $M(M)$ ad axem AB fit normalis, is reperietur ponendo angulum CRM rectum, seu $u=0$. Hoc autem facto erit $x=\frac{2cdv}{du}$ et $y=a-v-\frac{ccdv^2}{du^2(a-v)}$. Quia vero v est functio impar ipsius u, posito $u=0$, erit v vel $=0$, vel $=\infty$.

XX. Denique ex formulis inventis maxima curvae applicata PM facile definiri poterit. Cum enim tangens in M tum sit axi AB parallela, triangulum CMR erit isosceles, ideoque $CM=MR$, hinc autem nascitur haec aequatio:

$$a-v+\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}=a-v+\frac{2udv}{du}-\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$$

seu haec $\frac{udv}{du}=\frac{dv^2(cc-uu)}{du^2(a-v)}$. Hoc ergo evenit si vel $\frac{dv}{du}=0$, vel $\frac{dv}{du}=\frac{u(a-v)}{cc-uu}$. Priori casu quo $\frac{dv}{du}=0$, erit $x=\frac{-u(a-v)}{c}$ et $y=\frac{(a-v)\sqrt{(cc-uu)}}{c}$. Posteriori casu quo $\frac{dv}{du}=\frac{u(a-v)}{cc-uu}$, erit

$x=\frac{cu(a-v)}{cc-uu}$ et $y=\frac{c(a-v)}{\sqrt{(cc-uu)}}$ atque $CM=MR=\frac{cc(a-v)}{cc-uu}$ seu $x=\frac{cdv}{du}$, $y=\frac{cdv\sqrt{(cc-uu)}}{udu}$ et $CM=MR=\frac{ccdv}{udu}$.

XXI. *Exempl.* 1. Sit $v=u$; haec enim positio ob rationem $a:c$ indeterminatam aeque late patet ac $v=nu$; eritque $CR=\frac{2cdv}{du}=2c$. Punctum ergo R, in quo radius reflexus $M(M)$ axem trajicit, est fixum, et caustica in punctum abit. Unde manifestum est curvam fore sectionem conicam circa focos C et R descriptam, cujus axis transversus sit $AB=2a$ et distantia focorum $CR=2c$. Lineae autem in figura expressae ita se habebunt: $TS=s=\sqrt{(cc-uu)}$, $CS=a-u$, $CT=\sqrt{(aa+cc-2au)}$, $MT=\frac{\sqrt{(cc-uu)(aa+cc-2au)}}{a-u}$, $CM=a-u+\frac{cc-uu}{a-u}=\frac{aa-cc-2au}{a-u}$, $MR=a+u-\frac{cc+uu}{a-u}=\frac{aa-cc}{a-u}$, ideoque $CM+MR=2a=AB$. Porro est $CV=2\sqrt{(cc-uu)}$, $RV=2u$ atque ob $\sin CRM=\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$ et $\cos CRM=\frac{u}{c}$, erit $PM=\frac{(aa-cc)\sqrt{(cc-uu)}}{c(a-u)}$, $PR=\frac{(aa-cc)u}{c(a-u)}$ et $CP=\frac{2acc-(aa+cc)u}{c(a-u)}$. Vertices sunt in A et B ut sit $AC=a-c$ et $BC=a+c$, an vero alibi quoque applicata y evanescat, indicat aequatio $a-u=\pm c-u$, unde nisi sit $a=\pm c$, quo casu fieret $CR=AB$, hoc evenire nequit. Si $CP=0$, fit $u=\frac{2acc}{aa+cc}$, ideoque $CE=\frac{aa+cc}{ac}\sqrt{(cc-uu)}=\frac{aa-cc}{a}$. In puncto R fit radius reflexus $M(M)$ axi normalis. Applicata denique maxima habebitur si vel $\frac{dv}{du}=1=0$, quod fieri nequit, vel si $1=\frac{au-uu}{cc-uu}$, hoc est si $u=\frac{cc}{a}$, unde fit $x=c$, $y=\sqrt{(aa-cc)}$ et $CM=MR=a$.

XXII. *Exempl.* 2. Ponatur $v=\frac{u^3}{cc}$, erit $\frac{dv}{du}=\frac{3uu}{cc}$. Si igitur $\cos CRM=\frac{u}{c}$ et $\sin CRM=\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}$, erit $CR=\frac{6uu}{c}$. Porro erit $TS=s=\frac{3uu}{cc}\sqrt{(cc-uu)}$, $CS=a-\frac{u^3}{cc}$ et

$$CM=a-\frac{u^3}{cc}+\frac{9u^4(cc-uu)}{ac^4-ccu^3}=\frac{aac^4-2accu^3+9ccu^4-8u^6}{cc(acc-u^3)}$$

atque

$$MR=a+\frac{5u^3}{cc}-\frac{9u^4(cc-uu)}{ac^4-ccu^3}=\frac{aac^4+4accu^3-9ccu^4+4u^6}{cc(acc-u^3)}$$

ideoque $CM+MR=\frac{2aac^4+2accu^3-4u^6}{cc(acc-u^3)}=\frac{2acc+4u^3}{cc}$. Axis hujus curvae ut semper est $AB=2a$: ad vertices autem inveniendos ponatur $u=c$, erit $v=e=c$, ideoque $AC=a-c$ et $BC=a+c$. Utrum autem alibi quoque applicata y evanescat, patebit si sit $\frac{3uu}{cc}=\frac{acc-u^3}{cc(\pm c-u)}$ seu $\pm 3cuu-2u^3=acc$. Quoties ergo haec aequatio radices habet reales ejusmodi ut sit $u<\pm c$, abscissae $x=\frac{6uu}{c}$ applicata respondebit evanescens. Applicata in foco C est $CE=\frac{6u}{c}\sqrt{(cc-uu)}$ existente $\frac{acc-u^3}{cc}=\frac{3u}{cc}\left(cc-uu\pm c\sqrt{(cc-uu)}\right)$ seu $acc-3ccu+2u^3=\pm 3cu\sqrt{(cc-uu)}$ vel $4u^6-3ccu^4+4accu^3-6ac^4u+aac^4=0$. Radius vero reflexus $M(M)$ axem normaliter secabit si sit $u=0$, quo casu fit $x=0$ et $y=a$. Deinde cum applicata maxima sit ubi $\frac{dv}{du}=0$, hoc est ubi $u=0$; erit hoc casu $x=0$ et $y=a$. Deinde vero quoque est maxima si $\frac{3uu}{cc}=\frac{u(acc-u^3)}{cc(cc-uu)}$, hoc est si $3ccuu-2u^4=accu$, unde fit vel $u=0$, vel $2u^3-3ccu+acc=0$. Caustica autem hujus curvae ita definietur: Cum sit $s=\frac{3uu}{cc}\sqrt{(cc-uu)}$, erit $\frac{ds}{du}=\frac{6u}{cc}\sqrt{(cc-uu)}-\frac{3u^3}{cc\sqrt{(cc-uu)}}$

$=\frac{6ccu-9u^3}{cc\sqrt{(cc-uu)}}$; erit $RO=\frac{12ccu-18u^3}{cc}+\frac{6u^3}{cc}=\frac{12u(cc-uu)}{cc}$, $OQ=\frac{12u(cc-uu)\sqrt{(cc-uu)}}{c^3}$, $RQ=\frac{12uu(cc-uu)}{c^3}$, unde $CQ=\frac{-6ccuu+12u^4}{c^3}$. Sit $CQ=p$, $QO=q$, erit

$$p=\frac{6uu(2uu-cc)}{c^3} \text{ et } q=\frac{12u(cc-uu)^{3:2}}{c^3}.$$

Sit angulus $CRM=\omega$, erit $\frac{u}{c}=\cos\omega$, $\frac{2uu-cc}{cc}=\cos 2\omega$, $\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}=\sin\omega$, ideoque $p=6c\cos^2\omega\,.\cos 2\omega$ et

$$q=12c\cos\omega\sin^3\omega=6c\sin^2\omega\sin 2\omega,$$

unde $\frac{q}{p}=\operatorname{tang}^2\omega\operatorname{tang}2\omega=\frac{2\operatorname{tang}^3\omega}{1-\operatorname{tang}^2\omega}$. Vel cum sit

$$\cos^2\omega=\frac{1+\cos 2\omega}{2} \text{ et } \sin^2\omega=\frac{1-\cos 2\omega}{2},$$

erit $p=3c(1+\cos 2\omega)\cos 2\omega$ et $q=3c(1-\cos 2\omega)\sin 2\omega$. Erit ergo $\cos^2 2\omega+\cos 2\omega=\frac{p}{3c}$, ideoque

$$\cos 2\omega=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{3c}\right)} \text{ et}$$

$$\cos^2 2\omega=\frac{1}{2}+\frac{p}{3c}\mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{3c}\right)}$$

unde

$$\sin 2\omega=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{3c}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}+\tfrac{p}{3c})}\right)}.$$

Ergo prodibit

$$q=3c\left(\frac{3}{2}\mp\sqrt{(\tfrac{1}{4}+\tfrac{p}{3c})}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{3c}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}+\tfrac{p}{3c})}\right)}.$$

Sit $\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{3c}\right)}=t$ erit $\frac{p}{3c}=-\frac{1}{4}+tt$ et

$$q=3c\left(\frac{3}{2}-t\right)\sqrt{\left(\frac{3}{4}+t-tt\right)},$$

unde

$$\frac{qq}{9cc}=\frac{27}{16}-\frac{9}{2}tt+4t^3-t^4=\frac{1}{2}-\frac{5p}{3c}-\frac{pp}{9cc}+4\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{3c}\right)^{\frac{3}{2}},$$

quae aequatio ad rationalitatem perducta fit:

$$p^4 + 2ppqq + q^4 + 30cpqq - 18cp^3 - 9ccqq + 108ccpp - 216c^3p = 0.$$

Est ergo haec caustica linea quarti ordinis, quae ex aequatione

$$q = \frac{(9c \mp \sqrt{(9cc + 12cp)})\sqrt{(3c - 2p \pm \sqrt{(9cc + 12cp)})}}{2\sqrt{6c}}$$

non difficulter construetur.

Curva haec est tricuspidata triangulo aequilatero inscripta uti haec figura adjecta (Fig. 21) repraesentat, et curva problemati satisfaciens oritur, si filum huic curvae complicetur, alterque terminus in C figatur, sicque per evolutionem fili describetur.

LETTRE LXXXVIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Problème de la courbe catoptrique. Sur les nombres π et $\sqrt{2}$. Sommation d'une série.

St. Petersburg d. 28. December 1745.

Ew. sage ich für die mir übersandte ausführliche Solution des problematis in Act. Lips. propositi schuldigsten Dank. Ehe selbige noch ankam, hatte ich schon vor mich observiret, dass (Fig. 17) $CM + NR = 2(a+v) - \frac{2udv}{du}$ und $CN + NR = 2(a-v) + \frac{2udv}{du}$ (woraus denn folget, dass die drey latera trianguli $CM + MN + NC = 4a$) und dass $MR = \frac{cPM}{\sqrt{(cc-uu)}}$, folglich MR nur in dem einigen casu $= PM$, wenn $u = 0$; obzwar generaliter wahr ist, dass MR normalis ad axem wird, wenn nur $y = \frac{4aa - xx}{4a}$ (abstrahendo a valore ipsius x). Ich habe auch nicht gefunden, dass Ew. den casum determiniret, wenn das spatium interceptum CR ein maximum wird. Die Solution selbst soll, sobald es Ew. verlangen, zurückgesandt werden.

Was ich von dem numero 31415..., so durch 0 und 1 zu exprimiren wäre, geschrieben, ist allerdings unrichtig, und müsste nur von der arithmetica dyadica verstanden werden, welches aber auch allem Ansehen nach eine vergebliche Mühe seyn würde.

Aus der Zahl, so $\sqrt{2}$ in arithmetica dyadica vorstellet, erhellet zwar noch keine Ordnung, es ist aber doch zu considériren, dass ein numerus ex lege non circulante constans per additionem alterius numeri circulantis so verstellet werden kann, dass man nicht leicht eine legem darin entdecken wird.

Den modum, durch divisores continue auctos einen quotum non circulantem herauszubringen, haben mir Ew. schon längst communiciret; wenn aber der Endzweck nur blos seyn soll, numeros certa lege non circulantes zu finden, so halte ich diese Methode für etwas weitläufig.

Um zu sagen, dass Jemand die quadraturam circuli in numeris gefunden habe, müsste man, meines Erachtens, zuvörderst den gradum facilitatis, qua ille numerus ab inventore exprimendus sit, determiniren; denn ohne dergleichen Determination, dürfte man nur die seriem Leibnitii, oder eine andere actu addiren, und ich glaube, dass man in dieser Supposition nach der Billigkeit die inventionem quadraturae circuli Demjenigen nicht absprechen könnte, welcher den numerum 31415... eben so leicht als man $\sqrt{2}$ durch eine würkliche extractionem radicis quadratae findet, hervorzubringen vermögend wäre.

Die in meinem vorigen Schreiben enthaltene series scheinet Ew. schon vorher bekannt gewesen zu seyn.

Wenn x den exponentem terminorum andeutet, so ist, posito termino generali $xa^{\pm x}$ die summa generalis

$$\frac{a}{(a \mp 1)^2}\left(xa^{\pm(x+1)} - (x+1)\,a^{\pm x} + 1\right),$$

wiewohl hierin ausser dem arrangement der formulae summatricis nichts neues ist.

Zu dem dortigen établissement des Hn. de Maupertuis, welches ich aus den Zeitungen mit besonderer Freude vernommen, bitte ich demselben meine schuldigste Gratulation abzustatten und wünsche herzlich, dass die Consideration, welche der König für dessen Meriten hat, noch viel Gutes zum Aufnehmen der Wissenschaften nach sich ziehen möge.

Goldbach.

LETTRE LXXXIX.

Euler à Goldbach.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur le problème de la courbe catoptrique.

Berlin d. 25. Januar 1746.

— — Die Solution meines problematis catoptrici, welches Ew. zu übersenden die Ehre gehabt, ist vorher hier copirt worden. Ich habe aber seit der Zeit eine weit kürzere Solution gefunden, wobei alle in der vorigen befindlichen Weitläufigkeiten nicht nöthig sind. In beygefügter Figur (Fig. 22), da C das punctum radians und EMB eine curva reflectens quaecunque ist, welche die radios CM und Cm nach MO und mO reflectirt: Wenn die curva EMB gegeben ist, so kann für ein jegliches punctum M das intervallum respondens OR in axe CB nebst dem Winkel CRM gefunden werden. Nun kehre ich die Frage um, und suche die curvam EMB zu bestimmen, wenn eine aequatio quaecunque inter spatium CR et angulum CRM gegeben wird. Denn wenn dieses problema resolvirt worden, so ist es hernach sehr leicht das Hauptproblema zu solviren.

Es sey demnach das Spatium $CR = r$, der Winkel $CRM = \varphi$, sein sinus $= s$ und cosinus $= u$, posito sinu toto $= c$, so dass $ss + uu = cc$ und $d\varphi = \frac{cds}{u} =$ ang. O. Wenn nun O der concursus duorum radiorum reflexorum proximorum ist, so ist klar, dass die particula curvae Mm zu einer ellipsi gehören müsse, deren beide foci in C und O befindlich, und folglich wird seyn: $CM + MO = Cm + mO$. Man verlängere also OM und Om in V und v, so dass $MV = CM$ und $mv = Cm$, so wird seyn $OV = Ov$ und die tangentes in M und m werden die rectas CV und Cv bifariam perpendiculariter schneiden. Man lasse ferner aus C perpendicula CS und Cs auf OV und Ov, so wird der angulus $SCs = O = d\varphi = \frac{cds}{u}$. Es ist aber in dem Dreyeck CSR, sin. tot. $(c) : CR\ (r) =$ sin $CRS\ (s) : CS = \frac{rs}{c}$ und $RS = \frac{ru}{c}$. Also ist $S\sigma : CS = d\varphi \left(\frac{cds}{u}\right)$: sin. tot. (c) oder $S\sigma = \frac{rsd\varphi}{cc} = \frac{rsds}{cu}$. Da aber $sds + udu = 0$, so wird $S\sigma = \frac{-rdu}{c}$. Nun setze man $SV = t$, so ist $sv = t + dt$ und $vs - VS = dt$: Da nun $vs = V\sigma$, so wird $dt = S\sigma = \frac{-rdu}{c}$ und also $t = a - \int \frac{rdu}{c}$. Aus der zwischen r und u gegebenen Verhältniss wird also die Linie $VS = t$ bestimmt, zu welcher wenn man addirt $RS = \frac{ru}{c}$, so bekommt man die Linie $RV = a + \frac{ru}{c} - \int \frac{rdu}{c} = a + \int \frac{udr}{c}$, welches noch viel kürzer hätte gezeigt werden können, da

$$rv - RV = dRV = R\varrho = \frac{udr}{c},$$

weil $Rr = dr$. Hat man also $RV = a + \int \frac{udr}{c}$ gefunden, so