$$\int \frac{1-x^n}{1-x} dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n};$$

dahero, facto $x = 1$, erit $Q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, wie angenommen worden. Nun setze ich $n = 1 + \alpha$, eritque $Q = \int \frac{1 - x^{1+\alpha}}{1 - x} \cdot dx = \int \frac{1 - x \cdot x^\alpha}{1 - x} dx$. At cum sit generaliter $x^y = 1 + \frac{y\,lx}{1} + \frac{y^2 (lx)^2}{1.2} + \frac{y^3 (lx)^3}{1.2.3} +$ etc. erit

$$Q = \int \frac{dx}{1-x}\left(1 - x - \frac{\alpha x\,lx}{1} - \frac{\alpha^2 x (lx)^2}{1.2} - \frac{\alpha^3 x (lx)^3}{1.2.3} - \text{etc}\right) =$$

$$x - \alpha \int \frac{x\,dx}{1-x} lx - \frac{\alpha^2}{2} \int \frac{x\,dx}{1-x} (lx)^2 - \frac{\alpha^3}{6} \int \frac{x\,dx}{1-x} (lx)^3 - \text{etc.},$$

posito post singulas integrationes $x = 1$. Nun integrire ich eine jede Formul à part.

Primo est $\int \frac{x\,dx}{1-x} lx = \int dx\,(x + x^2 + x^3 + \text{etc.})\,lx$; at generaliter est $\int x^m dx\,lx = -\frac{1}{(m+1)^2}$ posito post integrationem $x = 1$. Ergo erit $\int \frac{x\,dx}{1-x} lx = -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \text{etc.} = -A + 1 = 1 - \frac{\pi\pi}{6}$ posito $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}$.

Secundo est $\int \frac{x\,dx}{1-x} (lx)^2 = \int dx\,(x + x^2 + x^3 + \text{etc.})\,(lx)^2$; at est generaliter $\int x^m dx\,(lx)^2 = \frac{1.2}{(m+1)^3}$ posito $x = 1$, unde fit $\int \frac{x\,dx}{1-x} (lx)^2 = 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) = 2\,(B - 1)$ posito $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.}$

Tertio est $\int \frac{x\,dx}{1-x} (lx)^3 = \int dx\,(x + x^2 + x^3 + \text{etc.})\,(lx)^3$; at est generaliter $\int x^m dx\,(lx)^3 = -\frac{1.2.3}{(m+1)^4}$ posito $x = 1$, unde fit $\int \frac{x\,dx}{1-x} (lx)^3 = -6\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right) = -6\,(C - 1)$ posito $C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.}$

Simili modo si ponatur $D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.}$ et $E = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.}$ reperietur tandem $Q = 1 + \alpha(A - 1) - \alpha^2 (B - 1) + \alpha^3 (C - 1) - \text{etc.}$, hincque ob $A = \frac{\pi\pi}{6}$ erit

$$P = 1 - \frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

wie Ew. gefunden haben.

Für die summa seriei $\frac{1}{xx + fx}$ habe ich eine formulam integralem schon längst gefunden; nun aber hat mich eben diese Untersuchung auf eine bequemere Expression geleitet, welche allem Ansehen nach Ew. bekannt seyn und Dieselben ebenfalls auf diese Materie geführt haben wird. Denn da, posito $x = f$, gefunden ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{f+1} = 1 + f(A - 1) - ff(B - 1) + f^3 (C - 1) - \text{etc.}$ erit quoque $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1+f} = 1 + \frac{f}{2(2+f)} + \frac{f}{3(3+f)} + \frac{f}{4(4+f)} + \text{etc.}$ Sit $S = \int \frac{1}{xx + fx} = \frac{1}{1(1+f)} + \frac{1}{2(2+f)} + \frac{1}{3(3+f)} + \text{etc.}$ erit $S = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{f}\right) = \frac{1}{1+f} + (A - 1) - f(B - 1) + ff(C - 1) - f^3 (D - 1) + \text{etc.}$

Euler.

LETTRE LXI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Continuation. Division infinie.

St. Petersburg d. 22 Juni st. n. 1748.

Ew. waren in Dero vorigem Schreiben der Meinung, dass Alles auf dem bewussten ersten lemmate beruhete, und wenn dasselbe seine Richtigkeit hätte, an der Demonstration des theorematis nicht das Geringste auszusetzen wäre. Ich wollte dahero in meinem letzten Briefe die Wahrheit des lemmatis primi darthun, und sehe auch, dass ich darin nicht übel réussiret, nachdem Ew. zugeben, *dass wenn man demonstriren könnte, dass* $4mn - m - 1$ *nullo casu* $m = 4v - 1$ *ein Quadrat wäre, zugleich richtig erwiesen seyn würde, dass eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein Quadrat seyn könnte*; dieses ist aber der einzige Inhalt des lemmatis primi. Ohngeachtet aber beyde lemmata ausser Zweifel sind, so

erkenne ich doch nunmehro, dass diese Demonstration aus einer andern Ursache nicht bestehen kann, denn es heisset daselbst: *aequatio C non potest fieri vera, nisi M sit numerus hujus formae* $4v - 1$ *(per lemma primum)*; dieses folget aber in der That aus dem lemmate primo nicht. Vielleicht findet sich künftig etwas Besseres

Die summam der Formul

$$P = \frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n})}{n^2(n-1)^2}$$

casu, quo $n = 1$, welche Ew. durch eine so schöne und generale Methode heraus gebracht, hatte ich ganz ohngefähr und nur in selbigem casu particulari allein angemerket, denn weil die series

$$A \cdots \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3.4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4.5}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) + \text{etc.} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

aus nachfolgenden, numero infinitis seriebus bestehet

$$B \cdots \frac{1}{1.2.1} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.9} + \frac{1}{4.5\,16} + \text{etc.} = z + 1 - \frac{\pi\pi}{6}$$

$$C \cdots \frac{1}{2.3.1} + \frac{1}{3.4.4} + \frac{1}{4.5.9} + \frac{1}{5.6\,16} + \text{etc.} = \frac{1}{2.1^2} + \frac{\pi\pi}{2.1.6} - \frac{3}{4.1^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$D \cdots \frac{1}{3.4.1} + \frac{1}{4.5\,4} + \frac{1}{5.6.9} + \frac{1}{6.7.16} + \text{etc.} = \frac{1}{3.2^2} + \frac{\pi\pi}{3.2.6} - \frac{5}{9.2^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

etc.

und die summa generalis omnium serierum B, C, D etc. ist

$$\frac{\pi\pi}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)}{n^2(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right),$$

so wird die summa seriei B (allwo $n=1$) $= z + 1 - \frac{\pi\pi}{6}$.

Diejenige Division, welche Ew. in Dero Schreiben vom 9 April angeführet haben, dienet, so viel ich sehe, nur dazu, dass man in dem quoto einen numerum non circulantem erhalte; dergleichen numeri non circulantes aber können auf unzählige andere Arten ohne solche mühsame Division gefunden werden, zum Ex. der numerus

1 . 1 . . 1 . . . 1 . . . . 1 etc. in inf.

ist gewiss non circulans, es mögen die loca vacua, quae punctis designata sunt, mit allen Zahlen nach Belieben (wenn es nur nicht lauter 1 in infinitum sind) ausgefüllt werden, als

$$\left.\begin{array}{l} 101001000100001000001 \text{ etc.} \\ 121221222122221222\ 21 \text{ etc.} \\ 10123114112671135141 \text{ etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{sind non circulantes.}$$

Es können alle fractiones rationales per denominatorem $10000\dots$ et numeratorem circulantem exprimiret werden, welche numeratores aber zweierley sind, 1) in quibus datur elementum initiale non circulans, 2) in quibus idem est elementum initiale, quod circulans, als z. Ex. $\frac{1}{2}+\frac{50}{1\underline{0}}$, allwo das elementum initiale non circulans ist 5, das unterstrichene elementum circulans ist 0

$\frac{1}{3}=\frac{3}{1\underline{0}}$, allwo das elementum initiale und circulans idem ist, nehmlich 3.

$\frac{61}{162}=\frac{3\overline{765432198}}{1\underline{0}}$, allwo das elementum initiale $= 3$, das elementum circulans $= 765432198$. Es trifft sich auch

bisweilen, dass das elementum circulans aus so viel Ziffern bestehet, als in dem denominatore fractionis $\frac{1}{a+1}$ der numerus a unitates hat, ex. gr. si $a = 22$, erit

$$\frac{1}{23}=\frac{\overline{4347826086956521739130}}{1\underline{0}0}.$$

Wenn man setzet

$(y^{-1}-1)(3^2y^{-1}-1)(5^2y^{-1}-1)(7^2y^{-1}-1)\dots((2n-1)^2y^{-1}-1)$ $= Y$ und $dY = Pdy$, so wird die formula $-\frac{Pdy}{Y} - n$ die summatrix tot terminorum seriei

$$A\dots\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\text{etc.}$$

quot n continet unitates; est autem terminus generalis seriei $A = \frac{1}{(2x-1)^2y^{-1}-1}$, posita x pro exponente terminorum; igitur quia, si ponatur $y=\frac{1}{4}$, series A transit in

$$B\dots\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\frac{1}{13.15}+\text{etc.}$$

quae in infinitum continuata aequalis est semicirculo cujus diameter $= 1$, erit seriei B summatrix $-\frac{Py}{Y} - n$, si differentiatione peracta ponatur $y=\frac{1}{4}$. Sit ex. gr. $n=2$, fiet

$$-\frac{Py}{Y}-2=\frac{10y^{-1}-2}{9y^{-2}-10y^{-1}+1}=\frac{10y-2y^2}{9-10y+y^2}=\frac{38}{105}.$$

[*Note marginale d'Euler:* $\frac{1}{1-p}+\frac{1}{3^2-p}+\frac{1}{5^2-p}+\frac{1}{7^2-p}+\text{etc.}$ $=\frac{\pi\sqrt{p}}{4p\cot\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$; $\frac{p}{1-p}+\frac{p}{3^2-p}+\frac{p}{5^2-p}+\text{etc.}=\frac{\pi\sqrt{p}}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}$; $\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\text{etc.}=\frac{\pi\sqrt{y}}{4}\operatorname{tang.}\frac{\pi\sqrt{y}}{2}$].

Es gibt unzählige quadrata, welche zu dieser Formul $C \ldots 4nn + 2(m-1)n + m - 1$, denontantibus m et n numeris integris affirmativis, nicht gebracht werden können, als 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, etc. Wenn man aber eine formulam infinitorum quadratorum ad formulam C non revocabilium geben könnte, so wäre auch das problema: invenire numerum primum dato quocunque majorem solviret.

Dato termino primo seriei $\frac{1}{a}$ et lege progressionis hac, ut dato quocunque termino $\frac{1}{a}$ fiat terminus sequens $= \frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa totius seriei $= \frac{1}{a-1}$.

Goldbach.

LETTRE LXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Continuation. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 9 Juli 1843.

Ew. erstes lemma, worauf ich die ganze Demonstration gegründet zu seyn glaubte, hatte ich nicht sowohl nach den Worten, womit dasselbe ausgedrückt war, betrachtet, als nach der Application desselben in den nachfolgenden Propositionen und habe deswegen die ganze Demonstration aus eben demjenigen Grunde für unrichtig gehalten, welchen Ew. anjetzo selbst anzeigen. Denn ich gab zu, dass wenn $4mn - m - 1$ nullo casu $m = 4v - 1$ ein quadratum wäre, eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein quadratum seyn könnte. Ich zog aber diesen Satz, worin die Application bestund, in Zweifel: quod omnes casus, quibus unquam formula $4mn - m - 1$ quadratum fieri queat, ideo in hac forma $m = 4\nu - 1$ contineantur. Die Unrichtigkeit dieser Application kann durch folgendes Exempel am deutlichsten eingesehen werden: Si demonstrari posset nullum numerum imparem esse quadratum, simul demonstratum foret, nullum prorsus numerum esse quadratum. Diese propositio hypothetica hat ihre völlige Richtigkeit; daraus aber folget diese keineswegs: Ergo si ulli dantur numeri quadrati, ii omnes erunt numeri impares.

Die Art, nach welcher Ew. den schönen Satz, betreffend den valorem expressionis

$$\frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)}{nn(n-1)^2}$$

casu $n = 1$, herausgebracht, ist sehr merkwürdig. Man kann auf eine ähnliche Art viel andere dergleichen schöne Sätze herausbringen. Als, da

$$\frac{1}{m(m-a)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right),$$

so wird seyn

$$B \cdots \frac{1}{2.1^2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{4.3^2} + \frac{1}{5.4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{1.6} + \frac{1}{1^2}(1)$$

$$C \cdots \frac{1}{3.1^2} + \frac{1}{4.2^2} + \frac{1}{5.3^2} + \frac{1}{6.4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{2.6} - \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$D \cdots \frac{1}{4.1^2} + \frac{1}{5.2^2} + \frac{1}{6.3^2} + \frac{1}{7.4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{3.6} - \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

etc.

Erit ergo generaliter

$$\frac{1}{n.1^2} + \frac{1}{(n+1).2^2} + \frac{1}{(n+2).3^2} + \frac{1}{(n+3).4^2} + \text{etc.} =$$

$$\frac{\pi\pi}{(n-1).6} - \frac{1}{(n-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) =$$

$$\frac{\pi\pi}{(n-1)6} - \frac{1}{(n-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n-1)^2}.$$

Dahero muss dieser expressionis valor casu quo $n = 1$ die summam hujus seriei geben $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$

Ob diejenige Division, wodurch ich einen numerum in infinitum excurrentem non circulantem erhalten, in der That einigen Nutzen haben könne, will ich nicht bestimmen; ich dachte aber, wenn man auf eine solche Art diese Zahlen 3,14159265 etc. herausbringen könnte, die quadratura circuli für völlig gefunden gehalten werden könnte. Ew. Art numeros circulantes zu formiren war mir noch sehr wohl bekannt; es ist aber meines Erachtens dienlich, viel dergleichen Arten zu bemerken, um etwan mit der Zeit eine solche zu entdecken, wodurch die quadratura circuli ausgedrückt werden könnte. Es findet sich aber in Ew. Art noch eine gewisse Ordnung, dergleichen in den Zahlen 3,14159 etc. allem Ansehen nach nicht stattfindet. Dass alle numeri rationales in fractiones decimales circulantes (das elementum initiale ausgenommen) resolvirt werden, ist eine proprietas essentialis numerorum rationalium, und es ist leicht zu sehen, dass das elementum circularis fractionis decimalis ex hac fractione $\frac{a}{b+1}$ ortae niemalen mehr als b Figuren enthalte; denn wenn man wirklich dividirt, so können nicht mehr als b-erley residua überbleiben, so oft man aber gleiche residua bekommt, so oft circulirt der quotus.

Die expressio summatrix, welche Ew. für diese seriem

$$\frac{1}{y^{-1}-1} + \frac{1}{3^2y^{-1}-1} + \frac{1}{5^2y^{-1}-1} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2y^{-1}-1}$$

geben, kann in vielen Fällen sehr nützlich seyn. Es können aber immer aus factoribus per differentiationem series summabiles gefunden werden. Die von Ew. gefundene Summ bringe ich solchergestalt heraus. Cum sit

$$(y^{-1}-1)(3^2y^{-1}-1)(5^2y^{-1}-1)\ldots((2n-1)^2y^{-1}-1) = Y,$$

erit

$$lY = l(y^{-1}-1)+l(3^2y^{-1}-1)+l(5^2y^{-1}-1)+\ldots+l((2n-1)^2y^{-1}-1)$$
$$= l(1-y)+l(3^2-y)+l(5^2-y)+\ldots+l((2n-1)^2-y)-nly$$

sumantur differentialia, eritque

$$\frac{dY}{Y}=\frac{Pdy}{Y}=-\frac{dy}{1-y}-\frac{dy}{3^2-y}-\frac{dy}{5^2-y}\ldots-\frac{dy}{(2n-1)^2-y}-\frac{ndy}{y}.$$

Multiplicetur per $-\frac{y}{dy}$ erit $-\frac{Py}{Y}-n=$

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2y^{-1}-1}\cdots=A$$

Um aber auf diese Art einen numerum terminorum finitum zu summiren, so deucht mir, dass die additio actualis nicht schwerer seyn würde, als die Execution dieser Methode. Wollte man aber diese seriem in infinitum excurrentem summiren, so würde man auf diese Art um so viel weniger gewinnen, da man die summam hujus seriei A alsdann absolute anzeigen kann. Denn man suche einen angulum α, qui sit ad angulum rectum ut $\sqrt{y}$ ad 1; sit porro radius ad tangentem hujus anguli α ut 1 ad θ, dico fore

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\text{etc. in infinitum}=\frac{\theta\pi\sqrt{y}}{4},$$

tenente π valorem consuetum 3,14159265 etc. Ich kann auch die summam hujus seriei angeben

$$\frac{1}{y^{-1}+1}+\frac{1}{3^2y^{-1}+1}+\frac{1}{5^2y^{-1}+1}+\text{etc. inf.}=P$$

Sit enim

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

ac ponatur $e^{\pi\sqrt{y}}=\Theta$, seu sit $l.\Theta=\pi\sqrt{y}$, eritque summa quaesita $P=\frac{\Theta-1}{\Theta+1}\cdot\frac{\pi\sqrt{y}}{4}$. Est vero quoque

$$\Theta=1+\frac{\pi\sqrt{y}}{1}+\frac{\pi^2y}{1.2}+\frac{\pi^3y\sqrt{y}}{1.2.3}+\frac{\pi^4y^2}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

Vel ponatur $\frac{1}{4}\pi\pi y=n$, erit sequenti modo

$$2P=\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{3+\cfrac{n}{5+\cfrac{n}{7+\cfrac{n}{9+\cfrac{n}{11+\text{etc.}}}}}}}$$

Diese Expression ist eine fractio continua, von welcher Materie etliche Dissertationen im akademischen Archiv liegen, um deren Copie ich letztens angehalten, weilen ich das Meiste vergessen, und bei mir nirgend angemerkt finde.

Was für Quadratzahlen in dieser Expression

$$4n^2+2(2m-1)n+m-1$$

nicht enthalten sind, ist schwer zu sagen, indem diejenigen quadrata, welche darin enthalten sind, nicht anders, als durch unendlich viel Formuln ausgedruckt werden können. Für das erste habe ich gleich gesehen, dass alle biquadrata in dieser Formul enthalten sind. Hernach kann ich unendlich viel series numerorum geben, deren quadrata in dieser Expression $4n^2+2(2m-1)n+m-1$ enthalten sind: nehmlich alle Quadratzahlen, welche in nachfolgenden formulis enthalten sind, werden zugleich in obiger Expression begriffen: $(5p\pm1)^2$; $(13p\pm4)^2$; $(17p\pm2)^2$; $(29p\pm6)^2$; $(37p\pm3)^2$; $(41p\pm16)^2$; $(53p\pm15)^2$; $(61p\pm25)^2$; $(73p\pm23)^2$; $(89p\pm17)^2$; $(97p\pm11)^2$; $(101p\pm5)^2$; $(109p\pm38)^2$; $(113p\pm49)^2$; $(137p\pm50)^2$; $(149p\pm22)^2$; $(157p\pm14)^2$; $(173p\pm40)^2$; $(181p\pm81)^2$; $(193p\pm56)^2$; $(197p\pm7)^2$; $(229p\pm61)^2$ etc.

Diejenigen quadrata aber, welche in keiner von diesen Formuln enthalten sind, sind allein diejenigen, welche Ew.

Expression nicht in sich begreift. Es käme also darauf an, wie man auf leichte Art alle diejenigen Zahlen finden solle, welche in keiner der obigen Formuln begriffen sind, und da würde man freylich das problema, de inveniendo numero primo, dato majore, leicht solviren können. Denn wenn man setzt $4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1 = aa$, so wird $4m = -4n + 3 + \frac{4aa+1}{4n+1}$. Wenn also $4aa + 1$ ein numerus primus ist, so kann das quadratum aa nicht in jener Expression enthalten seyn, und hinwiederum alle quadrata aa, welche nicht in $4n^2 + 2(2m - 1)n + m - 1$ enthalten, sind von dieser Beschaffenheit, dass $4aa + 1$ ein numerus primus ist. Da nun $4b^4 + 1$ nimmer ein numerus primus ist, sondern allzeit zwey oder mehr divisores formae $4n + 1$ hat, so sind auch alle numeri biquadrati in Ew. Expression enthalten. Ich erinnere mich, dass ich einmal eine Tabelle gemacht von allen Zahlen bis auf 1000, deren quadrata unitate aucta numeri primi sind *), wovon der Hr. Prof. Krafft Ew. eine Abschrift gemacht. Dieselbe Tabelle habe ich fast aus einem gleichen Grund verfertiget, als Ew. bey Dero Formul ohne Zweifel vor Augen gehabt haben.

Wenn $4n + 1$ ein numerus primus ist, so ist derselbe immer eine summa duorum quadratorum, idque unico modo. Es gibt aber allzeit unendlich viel quadrata, quae unitate aucta sint per $4n + 1$ divisibilia. Alle diese quadrata können nun leicht in einer formula generali exprimirt werden folgendergestalt: Sit $4n + 1 = r^2 + s^2$, erunt utique r et s numeri inter se primi. Formetur fractio $\frac{r}{s}$ et quaeratur in minoribus numeris fractio proxime accedens $\frac{p}{q}$, ita ut

*) Voir à la fin de cette lettre.

$ps - qr$ sit ± 1 (der Bruch $\frac{p}{q}$ kann aber durch eine von mir gegebene Methode allzeit leicht gefunden werden). Tum ponatur $pr + qs = k$, atque dico omnes numeros, quorum quadrata unitate aucta sint per $4n + 1$ divisibilia, contineri in hac forma $(4n + 1)m \pm k$. Sic

1. Omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per 5 continentur in formula $5m \pm 2$.
2. Si sit $aa + 1$ divisibile per 13 erit $a = 13m \pm 5$.
3. Si sit $aa + 1$ divisibile per 17 erit $a = 17m \pm 4$.
4. Si sit $aa + 1$ divisibile per 29 erit $a = 29m \pm 12$.

etc.

Exemplum. Quaerantur omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per numerum primum 1381. Cum sit $1381 = 15^2 + 34^2$, quaeratur fractio $\frac{p}{q}$ tam prope accedens ad $\frac{15}{34}$, ut differentiae numerator fiat $= 1$. Ad hoc cum duobus numeris 15 et 34 instituatur operatio, qua maximus communis divisor quaeri solet, hoc modo

15	34	2			
	4	15	3		
		3	4	1	
			1	3	3

Ex quotis 2, 3, 1, 3 formetur sequens fractionum series

$$\overset{2}{}\quad\overset{3}{}\quad\overset{1}{}\quad\overset{3}{}$$
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \frac{15}{34}$$

incipiendo ab $\frac{0}{1}$; hac lege ut quisque numerator per indicem supra scriptum multiplicatus cum numeratore praecedente, praebeat numeratorem sequentem, similique modo denominator quisque per indicem suprascriptum multiplicatus cum praecedente denominatore, praebeat denominatorem sequentem. Hoc modo ultima fractio $\frac{15}{34}$ semper erit ipsa proposita, penultima vero erit ea proxime accedens $\frac{p}{q}$, quam quaero. Jam ergo erit $k = 4.15 + 9.34 = 366$, unde omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sunt per 1381 divisibilia, continentur in hac forma $1381\,m \pm 366$.

Ew. summatio seriei $\frac{1}{a} + \cdots\cdot \frac{1}{A} + \frac{1}{A(A-1)+1}$ ist so merkwürdig, dass ich anfänglich darüber erstaunet bin, indem diese series so stark convergirt und die grössten exponentes ipsius a in den denominatoribus nach der progressione geometrica dupla aufsteigen, dergleichen series summabiles sehr rar sind. Ich habe aber nach einigem Nachsinnen bald diese Demonstration gefunden. Sit

$$\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b-1} \quad \text{erit } b = a(a-1)+1$$

porro $$\frac{1}{b-1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c-1} \quad \text{erit } c = b(b-1)+1$$

$$\frac{1}{c-1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d-1} \quad \text{erit } d = c(c-1)+1$$

etc.

Ergo fiet $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.}$ welches Ew. series ist.

Euler.

Addition à la marge.

Einige numeri primi, so grösser sind als 1000000, welche ich durch obige Methode leicht gefunden, sind: 1008017; 1020101; 1073297; 1110917; 1123601; 1136357; 1144901;

1196837; 1201217; hi enim numeri sunt formae $aa + 1$, neque ullum habent divisorem primum formae $4n + 1$.

Feuille volante appartenant à cette lettre.

Catalogus numerorum a, ex quibus fit $4aa + 1$ numerus primus:

1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 20, 27, 28, 33, 37, 42, 45, 47, 55, 58, 60, 62, 63, 65, 67, 73, 75, 78, 80, 85, 88, 90, 92, 102, 103, 105, 112, 115, 118, 120, 125, 128, 130, 132, 135, 140, 142, 150, 153, 157, 163, 170, 175, 192, 193, 198, 200, 203, 210, 215, 218, 220, 222, 232, 233, 235, 237, 245, 248, 268, 272, 278, 285, 288, 292, 297, 317, 318, 322, 323, 327, 337, 340, 343, 345, 348, 350, 352, 357, 358, 370, 375, 380, 382, 390, 392, 408, 413, 422, 430, 432, 445, 453, 455, 460, 465, 468, 473, 475, 480, 483, 493, 502, 505, 518, 527, 530, 533, 535, 547, 548.

Sollte in diesen Zahlen eine series regularis enthalten seyn, so wäre das problema de inveniendo numero primo, datum numerum excedente, leicht solvirt. Es kommt mir aber diese series eben so confus vor, als die series numerorum primorum ipsa.

LETTRE LXIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Nouvelle démonstration du théorème $4mn - m - 1 = a^2$. Détermination approximative de la valeur de π. Théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 30 Juli n. st. 1745.

Nachfolgende Demonstration habe ich zu dem Ende in unterschiedene kleine propositiones abgetheilet, damit Ew. diejenige, bei welcher sie einigen Anstand finden möchten, desto bequemer anzeigen könnten:

1. In aequatione $4mn - m - 1 = aa$ pono aa quadratum integrum minimum omnium eorum quae aequationi satisfacere possunt (si quae possunt).

2. Utrique aequationis parti addo $-4ma + 4mm$, fiet $4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2$.

3. In hac aequatione non potest fieri $a = m$ (posset enim altera pars aequationis dividi per m, altera non posset).

4. Neque potest fieri $a > m$, esset enim $n - a + m < n$, adeoque $(a - 2m)^2 < a^2$, quod est contra hypothesin, cum aa sit omnium possibilium minimum.

5. Restat ergo ut sit $a < m$.

6. Similiter si ad aequationem $4mn - m - 1 = aa$ ex utraque parte addatur $-4an + 4nn$, fiet $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$.

7. In hac aequatione non potest fieri $a = n$, propterea quod foret

$4mn - m - 1 = nn$ seu $n = 2m + \sqrt{(4mm - m - 1)}$,

qui numerus nequit esse rationalis.

8. Sed non potest fieri $a > n$, quia $(m - a + n)$ fieret $< m$ et $(a - 2n)^2 < aa$, *quod est contra hypothesin.*

9. Restat igitur ut a sit $< n$, et quia jam supra prop. 5 ostensum est $a < m$, sequitur $aa < mn$.

10. Erit igitur $4mn - m - 1 < mn$, quod est absurdum.

Ergo inter omnia quadrata (si quae sunt) hujus formae $4mn - m - 1$ non datur minimum in integris, ergo datur nullum.

Diese Demonstration kann etwas kürzer gefasset und nur allein gezeiget werden, dass a non $> m$, nec $> n$, woraus schon folget, dass $4mn - m - 1$ non $> mn$, quod est absurdum.

Was die von Ew. angeführte Aequation

$$\frac{1}{m(m-a)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right)$$

für eine influence in die series B, C, D, etc. habe, sehe ich noch nicht.

Mir ist es wahrscheinlich, dass eine solche series

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \text{etc.} = \pi$$

gefunden werden könne, darin die numeratores a, b, c, etc. (entweder integri oder fracti) allezeit grösser werden, obgleich die Methode, selbige numeratores zu determiniren, vielleicht niemals bekannt werden wird; denn durch formulas algebraicas diese numeratores zu bestimmen, ist in sofern eine vergebliche Mühe, als man persuadiret seyn kann, dass die ratio diametri ad peripheriam nicht in numeris rationalibus bestehet; doch gibt es einige merkwürdige approximationes. Es ist z. Ex. eine sehr leichte progressio numerorum secundum hanc formulam $\frac{2xx-4x+12}{10^x}$, und wenn ich 7 solcher terminorum zu 2 addire, so wird die summa 3,1415922.

Ew. danke ich dienstl. für die Communication der Zahlen a, welche $4aa+1$ numerum primum geben. Den Aufsatz von dergleichen Zahlen bis 1000 habe ich zwar schon; ich weiss aber denselben jetzo unter meinen andern Schriften nicht hervor zu finden. Dass aus solchen Zahlen eine ordentliche series herausgebracht werden sollte, zweifle ich sehr. Es haben aber nicht allein alle quadrati aa, welche in der formula $4nn+2(2m-1)n+m-1$ nicht vorkommen, diese Eigenschaft, dass sie in $4aa+1$ einen numerum primum geben, sondern alle trigonales in illa formula non extantes geben gleichfalls $4\triangle+1$ numerum primum und die Formul $4nn+2(2m-1)n+m-1$ kommt dermaassen mit dieser $4MN+M+N$ überein, dass kein casus in der einen ist, welcher nicht in der andern assignabilis wäre (wie denn auch alle casus $4nn+2(2m-3)n-(m-1)$ in dieser Formul $4MN-M-N$, et contra, enthalten sind). Wenn man also nach der Formul $4MN+M+N$ folgende Tabelle formiren wollte:

6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.	41...
	11.	20.	29.	38.	47.	56.	65...
		16.	29.	42.	55.	68.	81...
			21.	38.	55.	72.	89...
				26.	47.	68.	89...
					31.	56.	81...
						36.	65...
							41...

so könnte man festsetzen, dass alle in dieser Tabelle nicht enthaltene sowohl trigonales als quadrati per 4 multiplicati, addita unitate, numeri primi sind.

Ich erinnere mich in den Göttinger gelehrten Zeitungen gelesen zu haben, dass wenn $4m+1$ ein numerus primus ist, selbiger allezeit eine summa duorum quadratorum sey, welche Observation ohne Zweifel von Ew. kommt, und mir schon vorher bekannt war. Gleichwie aber auf diese Weise in den numeris primis hujus formae $4m+1$ allezeit wird $m=aa+bb\pm b$, hoc est *duplo trigonali plus quadrato*, so halte ich davor, dass in den numeris primis $4m-1$ allezeit seyn wird $m=2(a-1)^2+\frac{bb-b}{2}$, hoc est *duplo quadrato + trigonali*. Sit ex. gr. $m=1$, erit $a=b=1$; $m=2$, erit $a=2$, $b=1$; $m=3$, erit $a=b=2$, etc.

Als ich vor einigen Wochen in einem Buche schon A. 1718 von mir notiret fand $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\text{etc.}=1$, nebst der lege denominatorum $2+1=3$, $2.3+1=7$, $2.3.7+1=43$, $2.3.7.43+1=1807$ etc., schrieb ich gleich dabei: si terminus primus fuerit $\frac{1}{a}$, lex progressionis ut dato termino quocunque $\frac{1}{A}$, fiat terminus sequens

$\frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa seriei $\frac{1}{a-1}$; ich erinnere mich aber nicht mehr, worin meine Demonstration bestanden, und danke Ew. desfalls um so viel mehr, dass Sie mir die Ihrige communiciren wollen, welche ganz evident ist. Sonst halte auch bey dieser serie die leichte Art, dato termino quocunque die summam ipsius seriei usque ad hunc terminum zu finden, für merkwürdig. Sit terminus quicunque datus $\frac{1}{A}$, erit summa ejusdem et omnium sequentium terminorum $= \frac{1}{A-1}$, summa vero ipsius seriei usque ad hunc terminum $\frac{1}{A}$ exclusive erit $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{A-1}$.

Dass H. Rasumovsky und H. Teplov bey Ew. logiren und sich noch eine Zeit lang in Berlin aufhalten werden, ist mir sehr lieb; Ew. werden hiedurch nicht allein Gelegenheit haben die Russische Sprache ferner zu excoliren, sondern auch die hiesigen nova academica von denselben recht frisch erhalten können.

Goldbach.

LETTRE LXIV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse aux articles de la lettre précédente.

Berlin d. 24 August 1745.

Wenn $4mn - m - 1$ in einem Fall ein quadratum wäre, so würde man gleich unendlich viel andere casus daraus finden können. Wenn nun Ew. annehmen, dass aa das kleinste quadratum sey, welches in formula $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muss nothwendig a kleiner seyn als m, und daher haben die 5 ersten propositiones ihre völlige Richtigkeit. Wenn aber Ew. ferner zu dieser Aequation fortgehen $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$, weilen dieselben nicht in der vorgelegten Form $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht, dass $(a - 2n)^2$ kleiner seyn müsse als a^2, denn $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche quadratum geben, ungeacht $4n(m - a + n) - m - 1$ einem noch kleinern quadrato gleich wäre, und also kommt mir die 8te Proposition verdächtig vor, weilen non obstante hypothesi aa grösser seyn kann als $(a-2n)^2$.

Bey diesem tentamine fällt mir ein, ob man dieses theorema nicht etwan auf eine gleiche Art demonstriren könnte, wie man zu erweisen pflegt, dass a^4+b^4 oder a^4-b^4 kein quadratum seyn könne. Man nimmt nehmlich an dari casum, quo a^4+b^4 sit numerus quadratus, puta $=mm$, und leitet daher einen andern $c^4+d^4=nn$, dergestalt dass $n<m$. Auf diese Weise zeigt man, dass wenn ein quadratum quantumvis magnum mm eine summa duorum biquadratorum wäre, man daraus sogleich ein kleineres nn, und daher ferner ein kleineres, und so fort finden könnte. Man nimmt aber als ein postulatum an, dass in numeris parvis kein casus satisfaciens begriffen sey. Weil nun ebenfalls gewiss ist, dass in numeris parvis $4mn-m-1$ kein Quadrat seyn könne, so würde die Demonstration auf folgende Art vollkommen richtig seyn:

I. Ponamus dari quadratum aa qui in forma $4mn-m-1$ contineatur.

II. Inde inveniri posset alius quadratus bb minor quam aa, qui pariter in forma $4mn-m-1$ esset contentus.

III. Continuo ergo ad numeros quadratos minores perveniretur, quod foret absurdum.

Die ganze Demonstration würde also auf den IIten Satz ankommen: an concesso quadrato aa, aliud minus bb ex eo inveniri possit, quod in forma $4mn-m-1$ contineatur.

Ew. bin für die Communication Dero Idee über die seriem $\frac{a}{1}+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+$ etc. sehr verbunden, denn auf solche Art werden öfters grosse und beschwerliche Zahlen

leicht ausgedrückt werden können. Um diese Zahl 1,141592 durch sieben terminos zu bekommen, brauchen Ew. diesen terminum generalem $\frac{2xx-4x+12}{10^x}$. Ich glaube aber Dieselben haben sich verschrieben, indem 7 termini hujus seriei nicht mehr geben als 1,1412882. Die verlangte Zahl kommt aber heraus wenn man diesen terminum generalem $\frac{10-\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x^3}{10^x}$ annimmt.

Ich habe neulich eine expressionem indefinitam gefunden, wodurch der valor ipsius π ausgedrückt wird. In circulo, cujus radius $=1$, capiatur arcus quicunque u, cujus cosinus $=a$ et sinus $=\alpha$; sit autem sinus arcus $2u=\beta$, $\sin.3u=\gamma$, $\sin.4u=\delta$, $\sin.5u=\varepsilon$ etc. His positis dico fore $\frac{\pi}{2}=u+a\alpha+\frac{1}{2}a^2\beta+\frac{1}{3}a^5\gamma+\frac{1}{4}a^4\delta+$ etc. Setzt man $u=\frac{\pi}{4}$, ob $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta=1$, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta=0$, $\varepsilon=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ etc. findet man folgende seriem

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2^2}-\frac{1}{5.2^3}-\frac{1}{6.2^3}-\frac{1}{7.2^4}+\frac{1}{9.2^5}+\frac{1}{10.2^5}+\frac{1}{11.2^6}-\text{etc.}$$

welche ziemlich stark convergirt.

Diese Aequation $\frac{1}{m(m-a)^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2}-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a}-\frac{1}{m}\right)$ hatte ich, wo ich nicht irre, zu diesem Ende angeführt, um die summam hujus seriei

$$\frac{1}{(a+1)1^2}+\frac{1}{(a+2)2^2}+\frac{1}{(a+3)3^2}+\frac{1}{(a+4)4^2}+\text{etc.}$$

desto leichter zu finden, denn im ersten termino ist $m=a+1$, im zweiten $m=a+2$, im dritten ist $m=a+3$ und so fort, dahero diese series sogleich in diese resolvirt wird

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)=\frac{\pi^2}{6a}$$
$$-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{a+3}+\text{etc.}\right)$$
$$=-\frac{1}{aa}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{a}\right),$$

welche summas Ew. in Dero letztem Schreiben, allem Ansehen nach, auf eine andere Art gefunden haben.

Dass alle numeri quadrati aa, welche in dieser Formul $4nn + 2(2m-1)n + m - 1$ oder in dieser $4MN + M + N$ (welche mit jener übereinkommt ponendo $N = n$ et $M = n + m - 1$) nicht enthalten sind, einen numerum primum für $4aa + 1$ geben, ist klar. Denn wenn

$$aa = 4n^2 (2m-1)n + m - 1 = 4MN + M + N,$$

so wird

$$4aa + 1 = (4n + 4m - 3)(4n + 1) = (4M + 1)(4N + 1)$$

und hat folglich Factoren. Wenn also $4aa + 1$ ein numerus primus ist, so kann aa in obgedachten formulis nicht enthalten seyn. Ich zweifle aber sehr, ob durch solche formulas exclusivas jemals etwas herausgebracht werden wird, indem darin die ganze Kenntniss, welche wir von den numeris primis haben, gegründet ist; denn auf gleiche Art kann man sagen, dass alle numeri, welche nicht in dieser Formel $mn + m + n + 1$ enthalten sind, numeri primi seyen.

Ich zweifle auch sehr, ob die valores von m, wenn $4m - 1$ ein numerus primus ist, eine solche gewisse Eigenschaft haben, dergleichen statt findet, wenn $4m + 1$ ein numerus primus ist. Denn dass m nicht immer sey ein duplum quadratum + numero trigonali, wenn $4m - 1$ ein numerus primus ist, erhellet aus dem casu $4m - 1 = 79$; dann wird $m = 20$, welche Zahl die vermuthete Eigenschaft nicht hat.

Euler.

LETTRE LXV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Nouvel amendement à la démonstration précédente. Séries représentant la valeur de π. Divers sujets.

St. Petersburg d. 28 Sept. 1743.

Aus Ew. Erinnerung gegen die vorige Demonstration, habe ich die prop. 6 ipsius demonstrationis allerdings unrichtig befunden; dahero ich dieselbe nebst den darauf folgenden in meinem letzten Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituiren bitte:

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)m - 1 = aa$ ex utraque parte addatur $-2a(4n-1) + (4n-1)^2$, fiet

$$(4n-1)(m - 2a + 4n - 1) - 1 = (a - (4n-1))^2.$$

7. Quoniam vero aa est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit $aa < (a - 4n + 1)^2$, vel $aa =$ eidem, sed aequale esse non potest ob $4n = 1$, erit ergo $(-2a + (4n-1))(4n-1) > 0$, ergo $(4n-1) > 2a$; est

autem ex hypothesi $4n - 1 = \frac{aa+1}{m}$, ergo $\frac{aa+1}{m} > 2a$, seu $aa > 2am - 1$, seu $a > 2m - \frac{1}{a}$.

8. Sed per prop. 5 patet esse $a < m$, ergo $m > 2m - \frac{1}{a}$, quod est absurdum si m et a sint integri, quod absurdum sequeretur ex $4mn - m - 1 = aa$.

Vor einigen Tagen fielen mir unterschiedene propositiones ein, die bey dem ersten Anblick schwer zu demonstriren scheinen möchten, ex. gr., wenn ich setze

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = A$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = B$$

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = C \text{ et sic porro,}$$

$$\text{erit } \frac{\pi}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{8} + \text{etc.}$$

Vel si ponatur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \beta$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \gamma$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = \delta \text{ et sic porro}$$

$$\text{erit } \frac{\pi}{2} = \beta + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{4^2} + \frac{\varepsilon}{4^3} + \text{etc.}$$

Wenn ich eine seriem mache, in deren terminis der numerator perpetuus ist 1, die denominatores aber aus allen numeris possibilibus omnium potestatum bestehen, folgendergestalt:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \text{etc.}$$

so wird die summa seriei in casu signi superioris seyn 1; in casu signi inferioris autem (quod omnibus denominatoribus imparibus praefigitur) erit summa seriei $2l2 - 1$.

Was Ew. bey der formula der 7 terminorum, welche 1,141592 machen, erinnert haben, ist ganz richtig; die andere Formul war aus Versehen dahin geschrieben.

Ob es zwar sehr leicht ist zu demonstriren, dass eine formula algebraica bujusmodi $a + bx + cxx + dx^3 +$ etc. lauter numeros primos geben kann, posita x pro exponente terminorum, die coëfficientes a, b, c, etc. mögen numeri integri quicunque seyn, so gibt es doch formulas, welche vor vielen andern eine Menge numerorum primorum in sich halten; dergleichen ist die series $xx + 19x - 19$, so in den ersten 47 terminis nur vier numeros non primos hat.

Gleichwie in casu $4m + 1 =$ numero primo, m est $=$ duobus triangularibus $+ \square$, so könnte dennoch wohl seyn in casu $4m - 1 =$ numero primo, dass $m =$ duobus quadratis $+ \triangle$ wäre, uti $20 = 1 + 4 + 15$, wiewohl ich es noch nicht probiret und fernerer Untersuchung anheimstelle.

Diese beyden propositiones: dass $8n + 3$ allezeit in drey quadrata, und n in tres trigonales resolvirt werden kann, sind aequivalentes und concessa una, sequitur altera.

Es scheinet mir sehr probable, dass wenn in der obgedachten Formul $xx + 19x - 19$ vor x gesetzt wird 2^m, alsdann posito m numero quocunque integro affirmativo, allezeit ein numerus primus herauskommt; wenn aber dieses auch wäre, würde es doch schwer zu demonstriren seyn; ingleichen, dass dieselbe Formul $x^2 + 19x - 19$ keinen divisorem hujusmodi $10n + 1$ hat.

Goldbach.

LETTRE LXVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. La démonstration du théorème $4mn - m - 1 = aa$ approuvée. Démonstration de celui-ci $4mn - m - n = aa$. Autres théorèmes analogues. Séries pour $\frac{\pi}{2}$ et autres. Théorèmes de nombres.

Berlin d. 15 October 1743

Nunmehr hat Ew. Demonstration, dass $(4n-1)m-1 = aa$ ihre völlige Richtigkeit; denn da Dieselben vorher erwiesen, dass posito aa omnium quadratorum, si quae darentur, minimo, seyn müsse $m > a$, anjetzo aber pro eodem casu, dass $(4n-1) > 2a$, so muss folglich seyn $(4n-1)m > 2a^2$; nun aber ist $(4n-1)m = aa+1$ und wäre also $aa+1 > 2aa$, welches nicht seyn kann nisi sit $a = 0$ vel $a = 1$ (denn hier muss das Zeichen $>$ nicht *majus*, sondern *non minus* heissen). Wenn man aber setzt vel $a = 0$, vel $a = 1$, so wird die Aequation $(4n-1)m - 1 = aa$ unmöglich. Ich muss gestehen, dass ich nicht geglaubt hatte, dass dieses theorema auf eine so leichte und schöne Art bewiesen wer-

den könnte, und bin daher versichert, dass die meisten theoremata Fermatii auf eine gleiche Art bewiesen werden können, weswegen ich Ew. um so viel mehr für die Communication dieser herrlichen Demonstration verbunden bin. Ungeacht nun daraus folget, dass auch diese Formul $4mn - m - n$ kein Quadrat seyn könne, so habe ich doch nach Ew. Anleitung darüber folgende Demonstration gemacht:

Qui negat veritatem propositionis $4mn - m - n = aa$, is statuere debet dari quadratum aa minimum, cui formula $4mn - m - n$ aequari possit. Sit ergo aa hoc quadratum minimum, sitque $4mn-m-n = aa$ erit $(4m-1)(4n-1)-1 = 4aa$ Addatur utrinque $-8a(4n-1)+4(4n-1)^2$, erit $(4m-1-8a+4(4n-1))(4n-1)-1 = 4(a-4n+1)^2 = \square$. Quod cum praecedente minus esse nequeat, sequitur $(4m-1-8a+4(4n-1))(4n-1) > (4m-1)(4n-1)$ ideoque $4n-1 > 2a$ (ubi signum $>$ significat *non minus*). Simili modo demonstrabitur esse $4m-1 > 2a$. Sit ergo $4m-1 = 2a+p$ et $4n-1 = 2a+q$ eritque $p > 0$ et $q > 0$, unde fiet $(4m-1)(4n-1) = 4aa + 2a(p+q)+pq$. At est $(4m-1)(4n-1) = 4aa+1$ et ideo $2a(p+q)+pq = 1$, quod fieri nequit nisi sit $a = 0$ et $p = 1$ et $q = 1$. Verum aliunde constat esse non posse $a = 0$; quamobrem non datur quadratum minimum aa formulae $4mn-m-n$ aequale et consequenter haec formula quadratum nullo modo esse potest. Q. E. D.

Ich habe noch einen grossen Vorrath von dergleichen theorematis, welcher Demonstration, wenn solche auf gleiche Art sollte herausgebracht werden können, gewiss nicht wenig zu Erweiterung dieser Wissenschaft beytragen würde. Diese theoremata, wie ich sie der Ordnung nach herausgebracht habe, sind folgende, nehmlich alle nachfolgenden formulae können nullo modo numeros quadratos geben

I. $4mn - 1(m+n)$	XV. $20mn - 1\ (m+n)$	XXVII. $24mn - 1\ (m+n)$
II. $4mn - 3(m+n$	XVI. $20mn - 3\ (m+n)$	XXVIII. $24mn - 5(m+n)$
	XVII. $20mn \pm 3\ (m-n)$	XXIX. $24mn - 7\ (m+n)$
III. $8mn - 1(m+n)$	XVIII. $20mn - 7\ (m+n)$	XXX. $24mn \pm 7\ (m-n)$
IV. $8mn - 3(m+n)$	XIX. $20mn \pm 7\ (m-n)$	XXXI. $24mn - 11(m+n)$
V. $8mn \pm 3(m-n)$	XX. $20mn - 9\ (m+n)$	XXXII. $24mn \pm 11(m-n)$
VI. $8mn \pm 5(m-n)$	XXI. $20mn + 11(m+n)$	XXXIII. $24mn \pm 13(m-n)$
VII. $8mn + 5(m+n)$	XXII. $20mn \pm 13(m-n)$	XXXIV. $24mn + 13(m-n)$
VIII. $8mn + 7(m+n)$	XXIII. $20mn + 13(m+n)$	XXXV. $24mn \pm 17(m-n)$
	XXIV. $20mn \pm 17(m-n)$	XXXVI. $24mn + 17(m+n)$
IX. $12mn - 1(m+n)$	XXV. $20mn + 17(m+n)$	XXXVII. $24mn + 19(m+n)$
X. $12mn + 5(m+n)$	XXVI. $20mn + 19(m+n)$	XXXVIII. $24mn + 23(m+n)$
XI. $12mn \pm 5(m+n)$		etc.
XII. $12mn \pm 7(m+n)$		
XIII. $12mn - 7(m+n)$		
XIV. $12mn - 11(m+n)$		

ferner ist auch $7mn - m - n = aa$.

Ausser diesen habe ich auch noch einige, welche generaler sind, als $4kmn - m - n = \square$, oder auf folgende Art exprimirt:

Theorema. Existente mn divisore quocunque numeri N dico formulam $4N - m - n$ quadratum nunquam esse posse.

Hernach kann auch diese Formul

$$4(4k+1)mn - (8k+1)(m+n)$$

nimmer ein quadratum geben.

Die theoremata, welche Ew., durch unendlich viel series den valorem $\frac{\pi}{2}$ zu exprimiren, gefunden, waren mir schon längst bekannt, denn da $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \text{etc.}$ so wird seyn

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{2-1} - \frac{2}{4-1} + \frac{2}{6-1} - \frac{2}{8-1} + \text{etc. oder}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4-\frac{1}{3}} + \text{etc.}$$

Wenn nun ein jeglicher terminus in progressionem geometricam resolvirt wird, so kommt

$$\frac{\pi}{2} = \left.\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} - \frac{1}{2^2.8} - \frac{1}{2^3.16} - \frac{1}{2^4.32} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{3} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2^2.27} + \frac{1}{2^3.81} + \frac{1}{2^4.243} + \text{etc.} \\ \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.} \\ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.}\right) \\ - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} - \frac{1}{256} + \frac{1}{625} - \text{etc.}\right) \\ \qquad \text{etc.} \end{array}\right.$$

Gleichergestalt, da $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{1.3} + \frac{4}{5.7} + \frac{4}{9.11} + \text{etc.}$, so wird seyn $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{2^2-1} + \frac{4}{6^2-1} + \frac{4}{10^2-1} + \text{etc.} = \frac{1}{1^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5^2-\frac{1}{4}} + \text{etc.}$ Wenn nun ein jeglicher terminus in eine seriem geometricam resolvirt wird, so kommt Ew. andere Expression heraus

$$\frac{\pi}{2} = \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} \\ + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}\right) \\ \qquad \text{etc.} \end{array}$$

In der serie

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\frac{1}{36}+\text{etc.},$$

wovon Ew. casu signorum superiorum die Summ $=1$, at casu signorum inferiorum die Summ $=2l2-1$ angeben, wird ein Versehen seyn, indem alle denominatores unitate minui debebant. Alsdann aber kommen eben diejenigen theoremata heraus, welche Ew. mir schon längst communiciret und gütigst erlaubet, dieselben nebst Dero Demonstration im 9ten tomo zu publiciren.

Die series, deren terminus generalis ist $xx+19(x-1)$, ist in der That wegen der häufigen numerorum primorum, so darin vorkommen, sehr merkwürdig. Inzwischen finden sich doch die numeri compositi um so viel häufiger ein, je weiter man die seriem continuirt. Denn da in den ersten 47 terminis nur 4 numeri non primi vorkommen, so kommen in den ersten 75 terminis schon 14 numeri non primi hervor. So weit habe ich diese seriem continuirt, und dieses war genug, um Ew. beyden Muthmassungen über die Beschaffenheit dieser Progression zu widerlegen. Denn erstlich habe ich gesehen, dass nicht immer ein numerus primus herauskommt, wenn vor x eine potestas binarii gesetzt wird: der 64te terminus ist $5293=67.79$. Hernach weiset aber der 73 terminus $6697=37.181$, dass die divisores formae $10n+1$ nicht excludirt werden. Was im übrigen die divisores terminorum hujus seriei anlangt, so ist zu merken, dass keine andern stattfinden, als welche zugleich divisores numerorum hujus formae $19aa-23bb$ sind und vicissim.

Ew. Observation, dass, wenn $4m-1=$ numero primo, auch m ein numerus sey ex duobus quadratis et trian-

gulari compositus, kann ich weder refutiren noch demonstriren, indem ich noch nicht einmal einen numerum habe finden können, der nicht in duo quadrata et numerum trigonalem resolubilis wäre, zum wenigsten gibt es unter 100 keinen. Sollten nun alle numeri diese Eigenschaft haben, so hätte auch diese Observation ihre Richtigkeit, aber auf eine solche Art, als wenn ich sagen wollte, dass m immer eine summa trium trigonalium oder quatuor quadratorum wäre. Dass diese beyden Propositionen: $8m+3=$ summae $3\,\Box$ et $m=$ summae $3\,\triangle$ aequivalentes sind, ist leicht einzusehen, und dependiret eben davon auch die Demonstration, dass omnis numerus summa 4 quadratorum sey. Denn, si $m=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$ erit $8m+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$, folglich ist immer $8m+4$ eine summa quatuor quadratorum, und ferner ejus quadrans $2m+1$, folglich omnis numerus impar, et per consequens omnis omnino numerus erit in 4 quadrata resolubilis. Bey dieser Form $8m+3$ ist zu merken, dass so oft dieselbe ein numerus primus ist, auch in dieser Form $2aa+bb$ enthalten sey. Um dieses und andere dergleichen theoremata zu beweisen, kommt das meiste auf folgende lemmata an, wovon ich noch keine rechte Demonstration habe finden können:

I. Si numerus integer n non sit summa duorum quadratorum integrorum, talis quoque non erit in fractis, seu nullus numerus npp in duo quadrata integra resolvi poterit. Atque vicissim, si npp fuerit summa duorum quadratorum, etiam numerus n erit summa duorum quadratorum, idque in integris.

II. Si numerus n non fuerit summa 3 quadratorum in integris, etiam talis non erit in fractis.

III. Si numerus npp fuerit summa 4 quadratorum, erit quoque numerus n summa 4 quadratorum integrorum cyphra non exclusa.

Ich kann mich nicht erinnern ob Ew. nachfolgende Expression bekannt ist

$$a^m - \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a+3b)^m + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(a+4b)^m - \text{etc.}$$

Wenn m und n numeri integri sind und $m < n$, so ist die ganze Expression immer $= 0$.

Nachfolgendes theorema scheint mir auch merkwürdig zu seyn: Si fuerit $aa + 4n$ numerus primus $= p$, atque d sit divisor quicunque numeri n, erit p numerus in hac forma $dxx + yy$ contentus (idque unico modo). Ex. gr. sit $n = 30$; sumto $a = 11$, fit $4n + aa = 241 = p$. Continetur ergo numerus 241 in sequentibus formis $xx + yy$; $2xx + yy$; $3xx + yy$; $5xx + yy$; $6xx + yy$; $10xx + yy$; $15xx + yy$; $30xx + yy$; in unaquaque autem semel tantum continetur.

Gleich wie eine summa duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ keine andere divisores haben kann, als welche in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind; also kann ich auch demonstriren, dass alle divisores formae $a^4 + b^4$ in dieser Formul $8n + 1$ enthalten sind; gleichergestalt, dass alle divisores von $a^8 + b^8$ numeri hujus formae $16n + 1$ seyn müssen. Et generaliter

Numerorum in hac forma $a^{2^m} + b^{2^m}$ contentorum alii divisores non dantur, nisi hujus naturae $2^{m+1}n + 1$.

Wenn diese factores in infinitum wirklich mit einander multiplicirt werden $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)$ etc., so kommt nachfolgende series heraus

$$1 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - n^{40} + n^{51} + n^{57} - \text{etc.}$$

wovon per inductionem leicht erhellet, dass omnes termini in hac forma $n^{\frac{3xx \pm x}{2}}$ begriffen sind, und das signum $+$ praefixum haben, wenn x ein numerus par, das signum $-$ aber, wenn x ein numerus impar ist. Ich habe aber noch keine Methode finden können, wodurch ich die Identität dieser zwey Expressionen demonstriren könnte. Der Hr. Prof. Nicolaus Bernoulli hat auch praeter inductionem nichts darüber herausbringen können.

Euler.

LETTRE LXVII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente.

St. Petersburg d. Dec. 1745.

Aus Ew. Schreiben vom 15. October habe ich mit Vergnügen ersehen, dass endlich aus meiner Demonstration etwas geworden ist. Ob mir nun wohl meine andere occupationes fast keine Zeit übrig gelassen, die von Ew. beygefügten andern theoremata etwas genauer zu untersuchen, so hoffe ich doch, dass man künftig in dieser generali aequatione impossibili $emn - f(m+n) = aa$ die conditiones numerorum e et f in unendlich vielen casibus wird bestimmen können.

In der serie $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27}$ etc. und den von mir angegebenen summis ist gar kein Fehler, wie sol-

ches Ew., wenn Sie selbige noch einmal zu betrachten belieben, leicht ersehen werden.

Dass die divisores formae $10n+1$ in der serie, cujus terminus generalis est $xx + 19x - 19$, nicht excludiret werden, ist so offenbar, dass es mir des Morgens nach Abgang meines vorigen Briefes, als ich ohngefähr daran dachte, selbst beyfiel; ich achtete aber die gloriam der ersten Entdeckung dieses erroris nicht so wichtig, dass ich selbige durch ein besonderes, nur blos dazu gewidmetes Schreiben notificiren sollte.

Die series $a^m - n(a+b)^m + n(n-1)(a+2b)^m -$ etc. $= 0$ ist mir vorher gar nicht bekannt gewesen; um mich von der Wahrheit derselben zu convinciren, wollte ich gradatim erst $m=1$, $m=2$, etc. setzen, und dann successive auch $n=1$, $n=2$, etc. nehmen, so würde es sich zeigen, dass auch in den grösseren valoribus m et n, die series sich allezeit destruiren müsse.

Bey der serie $(1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc. ist mir ein besonderes problema eingefallen: Data serie A infinitorum terminorum, signis $+$ et $-$ dato ordine variantibus procedentium, invenire seriem B hujus naturae, ut in producto AB signa $+$ et $-$ eodem ordine sibi succedant, quo ordine isbi succedebant in A. Dieses problema kann sehr leicht solviret werden in dem casu $A = (1-n)(1-nn)(1-n^3)$ etc., obgleich darin, wie Ew. angemerkt haben die signa $+$ et $-$ auf eine gar ungewöhnliche Art abwechseln, denn wenn ich setze $B = (1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{3}{2}})(1-n^{\frac{5}{2}})$ etc., so wird A multiplicata per B eine neue series, welche dieselbe variationem signorum in sich hält.

Goldbach.

LETTRE LXVIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Problème de la géométrie des courbes.

Berlin d. 21. Januar 1744.

— — Ausser den vorher gemeldten theorematibus über die formulas, quae quadratos numeros praebere nequeunt, habe ich seit der Zeit in dieser Materie nichts anders angemerkt, als dass diese Formul $2abc - b - c$ kein quadratum seyn könne, si vel b vel c fuerit numerus impar formae $4n-1$. Ferner kann auch diese Formul $2abc - b + c$ kein Quadrat seyn, si fuerit a numerus impar et b numerus vel hujus $4n+1$ vel $4n+2$ formae. Hernach kann auch $2abc + b \pm c$ nimmer ein quadratum seyn, si fuerit a numerus impar et b vel hujus formae $4n-1$, vel hujus $4n-2$. Ich kann aber von allen diesen Propositionen noch keine andere völlig demonstriren, als diejenigen, welche aus $4mn - m - n = aa$

fliessen, und welche Ew. folglich auch durch Dero letztgemeldte Methode demonstriren können.

Ich kann noch nicht einsehen, dass kein Schreibfehler in der von Ew. letztangeführten serie

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \text{etc.}$$

sollte unterlaufen seyn. Denn da Ew. gefunden, dass

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \text{etc.}$$

so muss diese series $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ nothwendig kleiner als 1 seyn, indem sogar der defectus angegeben werden kann, welcher ist

$$\frac{1}{3.4} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{15.16} + \frac{1}{24.25} + \text{etc.}$$

Gleichergestalt da fest demonstrirt worden, dass

$$2l2 - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} - \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \text{etc.},$$

so kann ja eben diese series, si singuli denominatores unitate augeantur, unmöglich eben diese Summ $2l2 - 1$ haben. Dahero noch mehr in meiner Meinung gestärket werde, dass Ew. vergessen die denominatores um 1 zu vermindern.

Dass diese series

$$a^m - n(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^m - \text{etc.} = 0$$

si fuerit $n > m$, erhellet ex natura serierum recurrentium. Denn da alle progressiones algebraicae ad genus recurrentium gehören, dergestalt dass ein jeder terminus ex aliquot praecedentibus determinirt werden kann, so muss auch diese series a^m, $(a+b)^m$, $(a+2b)^m$, etc. eine series recurrens seyn, und ein beständiges Verhältniss zwischen einem jeden termino und einigen vorhergehenden Statt finden. Dieses kann sogar infinitis modis geschehen, indem die scala relationis seyn kann $1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$, wenn nur $n > m$.

Ich zweifle sehr, ob man eine leichtere Demonstration davon wird finden können, als diese, welche ex natura serierum recurrentium von selbsten folgt, denn wenn man sich schon per inductionem von der Wahrheit davon überführet, so sieht man doch nicht den Weg, so dazu geführet, ein.

Ew. Reflexion über die Expression $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)$ etc. in Ansehung eines factoris $(1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{3}{2}})(1-n^{\frac{5}{2}})$ etc. also, dass das factum, si evolvatur, eine gleiche Abwechselung der signorum + et — gebe, könnte vielleicht bey andern Untersuchungen einigen Vortheil bringen; allein in der serie, welche ich daraus hergeleitet, habe ich daraus noch keinen Nutzen ziehen können.

Man siehet hier schon seit mehr als 8 Tagen einen ziemlich grossen Cometen, welcher, da er in coelo fast gar keinen motum zu haben und doch immer grösser zu werden scheinet, allem Ansehen nach genau auf die Erde zugehet.

In den Actis Lips. M. Nov. ist ein problema proponirt worden solches Inhalts: Circa data duo puncta (Fig. 8.) *E* et *F* lineam curvam describere hujusmodi ut si ex duobus ejus punctis quibusvis *A* et *B* ad illa puncta *E* et *F* ducantur rectae, area *AEB* futura sit semper proportionalis angulo *AFB*. Vel si corpus in peripheria hujus curvae revolvatur, ut areae, quas circa punctum *E* describit, proportionales sint angulis, quos circa alterum punctum *F* absolvit.

Euler.

LETTRE LXIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

Moscau d. 12. März. st. n. 1744.

Das problema, dessen Ew. aus den Actis Lips. Erwähnung thun, werden Sie ohne Zweifel schon solviret haben. So viel ich sehe hat die curva unter andern diese Eigenschaft, dass wenn sie durch eine rectam quamcunque per punctum *F* (Fig. 8) transeuntem in zwey Theile getheilet, und von demjenigen Theile, in welchem das punctum *E* stehet, das triangulum rectilineum *AEB* abgezogen wird, das trilineum residuum *AEB* allezeit eine aream constantem, areae dimidiae totius curvae aequalem habe, oder dass die pars curvae *EAGB* allezeit = sey der parti curvae *EAHB*.

Die vermeinten summae serierum sind allerdings aus einem offenbaren Fehler entstanden.

Die von Ew. angegebenen vielen casus, wodurch die quantitates e und f in $emn - f(m+n) = aa$ bestimmet werden, geben mir Ursach zu vermuthen, dass selbige noch viel generaler determiniret werden können, ob mir gleich dazu bishero keine Methode bekannt ist; indessen scheinet doch auch diese kleine Observation einigen Nutzen zu haben, dass die aequatio impossibilis, so wie sie angedeutet worden, allezeit ihre Richtigkeit hat, wenn $aa \leqslant 4(e-f)^2$, allwo das signum $\leqslant$ *minus* oder *gleich* bedeutet, gleichwie ich seit Ew. vorigem Schreiben das signum $\geqslant$ für *majus* vel *gleich* zu meinem eigenen Gebrauch angenommen.

Goldbach.

LETTRE LXX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Cause de la pesanteur. Réponse à la précédente. Divers sujets.

Berlin d. 25 April 1844.

— — — Ich bin in Verfertigung meiner pièce, welche ich über den Magneten im vorigen Jahr nach Paris geschickt, auf einen Einfall, um die causam gravitatis zu erklären, gerathen, welcher mir je länger je gründlicher vorkommt, ungeacht ich mich noch nicht im Stande befinde denselben völlig auszuführen. Anjetzo sollte man hier schon wissen können, wer dieses Jahr den Preis bey der Akademie zu Paris erhalten; weil mir nun der Hr. Clairaut noch nichts davon gemeldet, so kann ich gewisse Rechnung machen, dass ich diesmal wieder leer ausgegangen. Ich kann auch die Ursach leicht errathen, denn da ich, um meine Erklärung zu bekräftigen, die Meinung der Engländer von der

Attraction, als einem attributo essentiali corporum, ziemlich stark angegriffen und widerleget, so wird dieses den Herren Commissariis, welche, wie ich seit der Zeit erfahren, dieser Meinung völlig beistimmen, gar nicht gefallen haben.

Die Eigenschaft, welche Ew. von den curvis, dem in den Actis Lipsiensibus proponirten problemati satisfacientibus, entdecket haben, hat ihre völlige Richtigkeit, und ist also allen den unendlich vielen krummen Linien, wodurch das problema solvirt wird, gemein. Ich habe vor etwas Zeit eine ausführliche Solution darüber nach Leipzig geschickt, darin ich ex quolibet curvarum algebraicarum ordine eine angegeben. Aus den sectionibus conicis satisfacirt der Circul, da ein punctum im centro, das andere in der Peripherie angenommen wird. Ex lineis tertii ordinis satisfacirt diese Aequation $yy = \frac{3axx - x^3}{x - a}$, positis (Fig. 9) C et D duobus illis punctis, circa quorum illud C sint areae proportionales angulis ad D formatis, et vocatis $CD = a$, $DP = x$, $MP = y$.

Ausser diesen curvis algebraicis gibt es unendlich viel, deren Construction a quadratura circuli dependirt, die übrigen aber lassen sich durch keine Quadratur construiren; ich habe aber eine General-Construction per motum tractorium gegeben.

Ueber die theoremata numerica habe ich seit der Zeit nichts Neues entdecket. Was die neuen Zeichen $\geqslant$ und $\leqslant$ betrifft, dergleichen in diesen Speculationen öfters höchst nöthig sind, so wollte ich nach der Analogie dieses Zeichens $\mp$, welches *non aequale* bedeutet, vielmehr diese $\not<$ und $\not>$ gebrauchen, deren jenes *non minus*, d. i. entweder aequale oder majus ($\geqslant$), dieses aber $\not>$ *non majus*, d. i. so viel als $\leqslant$, minus oder aequale bedeutet.

Nächstens wird bei dem Hn. Bousquet mein Tractat de problemate isoperimetrico herauskommen; und darauf wird er ein anderes Werk: *Introductio ad Analysin infinitorum* drucken, worin ich sowohl den partem sublimiorem Algebrae als Geometriae abgehandelt. Ich habe für nöthig befunden dieses vor der Analysi infinitorum selbst hergehen zu lassen, an welcher ich jetzt wirklich arbeite.

Jetzt wird hier an einer Dissertation de motu Planetarum et Cometarum, worin ich die orbitam des letzten Cometen bestimmet, gedruckt. Es ist bey diesem Cometen merkwürdig, dass derselbe d. 4. April so nahe bey dem Mercurio vorbeygegangen, dass man daher eine Perturbation in dieses Planeten Lauf zu vermuthen Ursach hat. Bisher ist aber der Mercurius noch unsichtbar, dass man sich also hierüber noch nicht hat erklären können.

Euler.

LETTRE LXXI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Encore sur les expressions qui peuvent et ne peuvent point donner des nombres quarrés. Savants de Berlin. Knutzen, Traité des comètes. Divers sujets.

Moscau d. 1 Juni st. n. 1744.

Vor wenigen Tagen habe ich ganz unvermuthet gefunden, dass die aequatio $emn \pm fm + gn = aa$ allezeit possibilis ist, nehmlich dass datis numeris e, f, g, allezeit gegeben werden können m, n et a. Die Demonstration ist sehr leicht: ponatur $m = eg \pm f \pm 2g$, $n = g$, erit $a = eg \pm f \pm g$. Wie aber bey solcher Bewandniss der Sache, 25 von den 38 casibus, welche Ew. in Dero Schreiben vom 15 Oct. als aequationes impossibiles anführen, sich werden legitimiren können, lasse ich (nach der bewussten phrasi) gar sehr an seinen Ort gestellet seyn.

Von Hn. Prof. Strube hoffe ich bey dessen Zurückkunft einige particularia von den dortigen savans als MM. Jordan, d'Argens, Algarotti etc. zu vernehmen. Ew. werden auch ohne Zweifel einen gewissen M. des Champs kennen, welcher einen, mir annoch unbekannten *Cours de la philosophie*

Wolfienne geschrieben hat. In diesem Buche soll eine passage vorkommen, da ad marginem stehet: «M. Huygens critiqué». Wo sie so beschaffen ist, wie mir hinterbracht worden, wird es Ew. nicht gereuen, selbige gelesen zu haben.

Für die Communication der aequationis ad curvam danke ich dienstlich und werde Ew. Dissertation, sobald ich die Acta Erud. bekomme, mit Vergnügen lesen. Mit der angeführten Veränderung der signorum bin ich auch wohl zufrieden.

Aus einem Stück der Hamburgischen Nachrichten habe ein favorables judicium von des Hn. Prof. Knutzen Tractat von den Cometen ersehen; es wird daselbst bey dieser Gelegenheit gemeldet, dass zwar schon einige Gelehrte gewesen, die Cometen auf eine gewisse Zeit vorausprophezeyet haben, die Cometen hätten sich aber nicht eingefunden, so dass unter Allen, der Hr. Prof. Knutzen der erste gewesen, welcher einen Cometen, nehmlich den von A. 1744, in einer öffentlichen Schrift schon 7 Jahr voraus vermuthet hat.

Aus dem, was von der Théorie de la figure de la Terre par M. Clairaut in den Leipz. gel. Zeitungen gesagt wird, schliesse ich, dass es ein sehr schönes Buch seyn muss.

Wenn ein völliger tomus von Ew. operibus herausgekommen seyn wird, bitte ich mir notice davon zu geben.

Ich erinnere mich, dass Ew. mir schon vor einigen Jahren gesagt haben, auf was für Art Sie ein Capital von 10000 Rthlr., im Fall Sie es erwerben sollten, zu employiren gesonnen wären, nehmlich ein Landgut in patria zu zu kaufen und darauf zu leben. Ohngeachtet nun vermuthlich der casus in terminis bald existiren wird, so will ich doch nicht hoffen, dass Sie Ihr damaliges Project in Erfüllung bringen werden.

Goldbach.

LETTRE LXXII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente. Leçons du calcul différentiel. Mémoires de Berlin. Logogryphe à déchiffrer.

Berlin d. 4. Juli 1744.

Dass diese Formul $emn..fm..gn$ generaliter ein quadratum seyn könne, wenn nur entweder f oder g ein numerus affirmativus ist, wie Ew. angemerket haben, kann mit meinen vormals überschriebenen theorematibus gar wohl bestehen. Dieselben waren zweyerley, entweder von dieser Form $4emn - pm - pn$, oder von dieser $4emn \pm pm \mp pn$. Die erstere leidet nun durch Ew. Observation keine Noth; die letztere aber würde umgestossen, wenn nicht eine Condition hinzugethan werden müsste, davon ich mich nicht mehr erinnere, ob ich in meinem Briefe damals Meldung gethan habe, oder nicht. Nehmlich es müssen m und n respectu p primi seyn. Wenn ich also sage, dass $8mn - 3m + 3n$

nimmer ein Quadrat seyn könne, so muss diese Condition dabei gemeldet werden, dass n kein multiplum 3^r sey. Denn wenn man dürfte $n = 3$ oder überhaupt $n = 3hh$ setzen, so könnte diese Formul $8mn - 3m + 3n$ infinitis modis ein Quadrat seyn. Diese Restriction folget unmittelbar aus der Art, welche mich dazu geführet, und welche ich auch in der pièce, so ich vor einiger Zeit über diese Materie nach St. Petersburg geschickt habe, ausdrücklich angemerkt. Denn $8mn - 3m + 3n$ kann deswegen kein Quadrat seyn, weil diese Formul $aa - 2bb$ keinen divisorem primum hujus formae $8n \pm 3$ haben kann. Dahero werden diejenigen casus ausgenommen, wenn n ein multiplum von 3 ist, eben wie auch in jener $aa - 2bb$ diese Condition hinzugethan werden muss, dass a und b numeri inter se primi seyn sollen. Denn ohne diese Restriction könnte $aa - 2bb$ per quemcunque numerum divisibilis seyn.

Ich arbeite anjetzo an einem Tractat über den calculum differentialem, in welchem ich verschiedene curieuse Decouverten über die series gemacht habe, wovon ich die Freyheit nehme Ew. einige zu communiciren:

I. Sumto in circulo arcu quocunque a, cujus sinus sit $= \alpha$, sinus arcus dupli $= \beta$, sinus arcus tripli $= \gamma$, sinus quadrupli $= \delta$, quintupli $= \varepsilon$ etc. dico hujus seriei infinitae $\frac{1}{2}a + \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{5}\varepsilon +$ etc. summam semper exprimere longitudinem arcus 90° in eodem circulo.

II. Posito radio circuli $= 1$, atque arcus cujuscunque a statuatur ut sequitur $\sin a = \alpha$, $\sin 2a = \beta$, $\sin 3a = \gamma$, $\sin 4a = \delta$, $\sin 5a = \varepsilon$ etc., $\cos a = A$, $\cos 2a = B$, $\cos 3a = C$, $\cos 4a = D$, $\cos 5a = E$ etc. sitque π longitudo semicircumferentiae, erit

$$\frac{a}{A}+\frac{\beta}{2A^2}+\frac{\gamma}{3A^3}+\frac{\delta}{4A^4}+\frac{\varepsilon}{5A^5}+\text{etc.}=\frac{\pi}{2}$$

$$1+\frac{A}{A}+\frac{B}{A^2}+\frac{C}{A^3}+\frac{D}{A^4}+\frac{E}{A^5}+\text{etc.}=0$$

$$1+A+B+C+D+E+\text{etc.}=\frac{1}{2}$$

III. Nachfolgende series sind ex divisione arcus entsprungen.

Posito radio $=1$, sumatur arcus quicunque $=s$, cujus sinus sit $=a$, cosinus dimidii arcus sit $=\alpha$, $\cos\frac{1}{4}s=\beta$, $\cos\frac{1}{8}s=\gamma$, $\cos\frac{1}{16}s=\delta$ etc. erit

$$s=\frac{a}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\text{ etc.}}.$$

IV. Si ponatur arcus cujuscunque s tangens $=A$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}s=B$, $\text{tang}\,\frac{1}{4}s=C$, $\text{tang}\,\frac{1}{8}s=D$, $\text{tang}\,\frac{1}{16}s=E$ etc. erit

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{4}C+\frac{1}{8}D+\frac{1}{16}E+\text{etc.}=\frac{1}{s}-\frac{1}{A}.$$

V. Si cognita fuerit summa hujus seriei

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.}$$

quam ponam $=z$; dico semper assignari posse summam hujus seriei

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+Eex^4+Ffx^5+\text{etc.}$$

dummodo series horum coëfficientium A, B, C, D, E, etc. tandem habeat differentias constantes. Sit enim $B-A=P$, $C-2B+A=Q$, $D-3C+3B-A=R$ etc. Deinde quia z datur per x, statuatur $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, $\frac{dr}{dx}=s$ etc. Hisque valoribus inventis erit seriei

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+\text{etc.}$$

summa $=Az+Ppx+\frac{1}{2}Qqx^2+\frac{1}{6}Rrx^3+\frac{1}{24}Ssx^4+\text{etc.}$

Sit exempl. gr. $z=1+x+x^2+x^3+x^4+\text{etc.}=\frac{1}{1-x}$ erit $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2}=p$, $\frac{dp}{dx}=\frac{2}{(1-x)^3}=q$, $\frac{dq}{dx}=\frac{6}{(1-x)^4}=r$ etc. et pro A, B, C, D, etc. sumatur haec series

1, 3, 7, 13, 21, 31, 43 etc.
2, 4, 6, 8, 10, 12
2, 2, 2, 2, 2,
0, 0, 0, 0

deren formula generalis ist $nn-n+1$; davon die Differenzen genommen, wird $A=1$, $P=2$, $Q=2$, $R=0$, $S=0$ etc., folglich ist die summa seriei

$$1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+31x^5+\text{etc.}=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Gleich wie man vermittelst der Newton'schen Evolution des binomii alle aequationum purarum $x^n-A=0$ radices per series infinitas exprimiren kann, so habe ich auf eine ähnliche Methode gedacht, um aller aequationum affectarum radices gleichfalls per series infinitas zu exprimiren. Es sey gegeben diese Aequation

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\text{etc.}=0,$$

deren eine radix sey $x=f$, welche ich folgendergestalt per seriem exprimire. Ich setze

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\text{etc.}=y$$

und suche per differentiationem die valores folgender Quantitäten $p=\frac{dx}{dy}$, $q=\frac{dp}{dy}$, $r=\frac{dq}{dy}$, $s=\frac{dr}{dy}$ etc., welche alle in x gegeben seyn werden. Nun nehme man nach Belieben für x einen valorem determinatum an, und bestimme daraus die valores von y, p, q, r, s etc. quo facto summa hujus seriei $x-py+\frac{1}{2}qy^2-\frac{1}{6}ry^3+\frac{1}{24}sy^4-$ etc. semper aequalis erit uni radici aequationis propositae

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Nimmt man nun für x einen solchen Werth an, welcher einer radici schon sehr nahe kommt, so wird die series convergens und weiset die radicem proxime.

Man kann diese Proposition auch folgendergestalt ausdrücken. Si fuerit

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.}$$

hincque definiantur sequentes quantitates $p = \frac{dx}{dy}$, $q = \frac{dp}{dy}$, $r = \frac{dq}{dy}$, $s = \frac{dr}{dy}$ etc. ex quibus formetur haec series

$$x - py + \tfrac{1}{2}qy^2 - \tfrac{1}{6}ry^3 + \tfrac{1}{24}sy^4 - \text{etc.}$$

dico hujus seriei summam, quicunque valor pro x ponatur, semper aequari uni radici hujus aequationis

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Wenn man sich eine lineam curvam vorstellet von dieser Natur

die abscissae sind 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.
die applicatae 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, etc.

dergestalt, dass, wenn die abscissa gesetzt wird $= x$, die applicata wird $y = 1.2.3.4\ldots x$, so kann diese curva per infinita puncta leicht beschrieben werden. Wenn ich mich recht erinnere, so haben Ew. mir einmal Anlass gegeben auf diese curvam zu denken. Unlängst, da mir diese Materie wiederum vorkam, so habe ich die naturam dieser krummen Linie durch folgende aequationem differentialem exprimirt: Man setze

$$A = 1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2} + \text{etc.} = 1{,}644934066848$$

$$B = 1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \text{etc.} = 1{,}202056903159$$

$$C = 1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.} = 1{,}082323233711$$

$$D = 1 + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{4^5} + \text{etc.} = 1{,}036927755106$$

$$E = 1 + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{4^6} + \text{etc.} = 1{,}017343061984$$

$$F = 1 + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{4^7} + \text{etc.} = 1{,}008349277386$$

etc.

und ferner sey $n = 0{,}5772156649$, so wird seyn

$$\frac{dy}{ydx} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - n,$$

woraus die positio tangentis, so oft x ein numerus integer ist, erkannt wird. Wenn aber x ein numerus fractus oder irrationalis, so dienet diese aequatio infinita:

$$\frac{dy}{ydx} = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + Ex^5 - \text{etc.} - n$$

oder auch diese

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{4+2x} + \frac{x}{9+3x} + \frac{x}{16+4x} + \frac{x}{25+5x} + \text{etc.} - n.$$

Aus der Figur dieser curvae ist leicht zu sehen, dass dieselbe eine applicatam minimam inter abscissas 0 et 1 haben muss. Wenn man nun setzt $dy = 0$, so kommt proxime heraus $x = 0{,}46096$ oder $x = \frac{6}{13}$. Um aber aus einer jeden abscissa x die gehörige applicatam y zu finden, so habe ich diese logarithmische Aequation herausgebracht

$$ly = \tfrac{1}{2}\, l2\pi + (x + \tfrac{1}{2})\, lx - x + \frac{1}{1.2x} - \frac{1}{3.4.5.6x^3} + \frac{1}{5.6.7.6x^5}$$
$$- \frac{3}{7.8.9.10x^7} + \text{etc.}$$

Wenn also x eine sehr grosse Zahl ist, so ist proxime $y = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$, posito $e = 2{,}7182818$. Setzt man aber

$$x-\frac{1}{1.2.3.2x}+\frac{1}{3.4.5.6x^3}-\frac{1}{5.6.7.6x^5}+\frac{3}{7.8.9.10x^7}-\text{etc.}=z,$$

so ist accurat

$$y=\frac{x^x\sqrt{2\pi x}}{e^z}=1.2.3.4\ldots x.$$

Was diejenigen hiesigen Gelehrten betrifft, von welchen Ew. einige Nachricht erwarten, so habe die Ehre zu melden, dass M. Jordan, welcher vormals ein französischer Prediger gewesen, sich hauptsächlich auf die Literatur applicirt und eine schöne Bibliothec sammelt, indem ihm der König alle Bücher, welche Ihro Majestät gesandt werden, darein schenkt. Dass der Marquis d'Argens bloss von den belles-lettres fait macht, wird Ew. genugsam bekannt seyn, und ungeacht er jetzt anfängt auch physicalische Materien mit unter seine Schriften zu mengen, so ist doch nichts Gründliches davon anzutreffen. Der Graf Algarotti ist schon lange Zeit nicht mehr hier und hat nach den letzten Zeitungen Dienste bey dem König von Polen genommen. M. Deschamps ist ein purer Wolfianer, und weilen ich weder mit ihm in genauer Bekanntschaft stehe, noch seine Schriften gelesen habe, so habe ich ihn durch einen Freund fragen lassen, worin er praetendire den Hugenium critiquirt zu haben. Hierauf hat er nun geantwortet, dass solches über sein ratiocinium sur la probabilité gewesen sey, weilen er vermeint hätte, der Hr. Wolf hätte solches auch schon critisirt, da er aber seit der Zeit gesehen, dass des Hn. Wolfs Worte anders verstanden werden müssen, so ziehe er seine Critic wieder zurück.

Die Akademie in Paris hat dieses Jahr das praemium gar nicht ausgegeben, sondern eben dieselbe Quaestion vom Magneten wiederum auf A. 1746 proponirt, mit einem dreifachen Preise von 7500 livres. Ich habe mir aber vor-

genommen nicht ferner darüber zu concurriren, sondern meine Dissertation nächstens allhier drucken zu lassen. *)

So favorable das judicium in den Hamburgischen Zeitungen über des Hn. Prof. Knutzen Meinung von dem letzten Cometen ist, so ist doch sowohl der Grund, als seine Ausführung völlig falsch. Er nimmt erstlich an, dass dieser Comet ein tempus periodicum von $45\frac{3}{4}$ Jahren habe, weil er aus dem catalogo Heveliano gesehen, dass fast immer nach Verfliessung dieses intervalli ein Comet erschienen. Ferner glaubt er, dass der Comet von 1698 eben derselbe gewesen, der A. 1652 gesehen worden, da man doch, wenn man die Sach genau untersuchet, kaum zwey Cometen finden wird, welche so viel von einander differiren, als diese zwey. Hernach ist auch der letzte Comet von diesen beyden so stark unterschieden, dass man mit eben der raison den Mercurium für den Saturnum halten könnte, wenn man nicht öfter beyde zugleich am Himmel sähe. Ich habe auch dem Hn. Prof. Knutzen alle diese Gründe überschrieben, wogegen er nichts anders einzuwenden findet, als dass gleichwohl seine Meinung oder Prophezeyung eingetroffen, und dass er fast nicht glauben könne, dass solches par hasard geschehen. Ich habe über diesen Cometen eine weitläufige Dissertation geschrieben, welche jetzt bald wird gedruckt seyn, darin ich den Lauf dieses Cometen auf das Genaueste bestimmet und ganz deutlich gewiesen, dass sein tempus periodicum sich über etliche saecula erstrecke: wie sich denn auch unter allen Cometen, so seit 700 Jahren observirt werden, keiner findet, dessen Lauf nur im Geringsten mit dem letzten übereinkäme.

*) Cette dissertation est publiée dans le tome V du Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Académie de Paris.

Die Théorie de la figure de la terre par M. Clairaut ist in der That ein unvergleichliches Werk, sowohl in Ansehung der profunden und schweren Quaestionen, welche darin abgehandelt werden, als der angenehmen und leichten Methode, nach welcher er die sublimsten Sachen ganz klar und deutlich vorzubringen weiss.

Ob mein Tractat de problemate isoperimetrico in Lausanne schon völlig gedruckt ist, habe ich noch keine Nachricht erhalten. Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin geschickt unter dem Titul *Introductio ad analysin infinitorum*, worin ich sowohl den partem sublimiorem der Algeber als der Geometrie abgehandelt und eine grosse Menge schwerer problematum ohne den calculum infinitesimalem resolvirt, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen Plan von einem vollständigen Tractat über die analysis infinitorum formirt hatte, so habe ich bemerkt, dass sehr viele Sachen, welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müssten, und aus denselben ist dieses Werk als prodromus ad analysin infinitorum entstanden.

Die neue Akademie allhier wird nächstens einen tomum von den darin abgelesenen Pièces herausgeben. Es wird darin eine grosse Anzahl Pièces von mir kommen. Weilen nun die Herren Staats-Ministri fleissig zugegen sind, so habe, um diesen Herren keinen Ekel zu erwecken, meine Dissertationen französisch abgelesen, nachdem solche von dem Herrn Prof. Naudé corrigirt worden. Ich habe auch um dieser Ursach willen pure mathematische Speculationen und calculos zu evitiren gesucht, und mehrentheils physikalische Materien abgehandelt. Darunter befindet sich eine neue Theorie von dem Licht und Farben, wodurch ich alle phae-

nomena auf das Deutlichste erkläre und alle Schwierigkeiten, welchen andere Theorien unterworfen sind, vermeide. Hernach habe ich demonstrirt, dass die Forcen, welche von einem Stoss oder Schlag herkommen, jederzeit mit einer blossen Pression comparirt werden können, oder dass die vires vivae und mortuae unter sich homogeneae seyen. Ich habe auch ex natura gravitatis dargethan, dass die ultimae moleculae omnium corporum unter sich alle gleich dicht oder eandem gravitatem specificam haben müssen, wodurch das principium indiscernibilium einigen keinen geringen Stoss zu leiden scheinet.

Ich habe vor einiger Zeit nachfolgenden logogryphum entworfen, worin alle characteres Buchstaben bedeuten und der Text latein ist:

Pxqſwlznjdvynſtiddkqxhleebſpxdfgtlzbccſbkſodxo
kfnglqxnſchejmlckzxhrfwjgſhxvzjnbgyxcdgixkoxj
mlncoigdxvzflmeſnfyjqſangvnylrcxſonbſjalrkwſnbſ
pjoizoxqknubroſadgiaxwkcbrbcklofrnjwngſzfhgjfc
bcfvqjtxeevtbzfyjsbzhſmlnbgſsqjwglnxvzfkonbcoigd
xvrkfjalzxtſnilenfgvcboofcfxnnfgnkbcjnnjynxvplgn
bfzfoxeejdgxbcjcnſdyvdbhzlnvyxmbcblobbcyfekonb
ceiobfplwsxzxfjcndbhrlzqxsſonbcoljſſyqſmjeevhlee
xoiexmgicfdnktvoldxnfbxoſcktvpxrnv.

Ungeachtet hier die Bedeutung der characterum nicht veränderlich ist, so deucht mich doch, dass dergleichen Schrift nicht leicht dechiffrirt werden kann.

Die hiesige Akademie wird auch nächstens ein praemium von 140 Rthlr. aussetzen, womit jährlich continuirt werden soll. Für das künftige Jahr wird die causa physica electricitatis das sujet der question seyn.

Euler.

LETTRE LXXIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Problème de nombres.

Moscau d. 16. Juli st. n. 1744.

Ich halte diese Proposition für gewiss, ohngeachtet ich glaube, dass die Demonstration davon nicht leicht zu finden sey: Dato numero primo hujus formae $4n+1$, datur alius numerus hujus formae a^2+1, quem ille dividat; (dass aber invento uno a^2+1, noch innumeri alii von dieser Eigenschaft gefunden werden können, ist an sich offenbar). In gewissen Fällen ist die Solution gar leicht, als zum Exempel, wenn in dem gegebenen numero primo $4n+1$ der numerus n quadratus oder trigonalis ist.

Ich möchte wohl wissen ob Ew. ein Buch gelesen haben, davon mir nur der folgende Titel bekannt ist: La méthode des fluxions, par M. Newton, à Paris 1740.

Im übrigen beziehe ich mich auf mein letztes Schreiben vom 1. Juni. Goldbach.

LETTRE LXXIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite sur les expressions qui peuvent, ou ne peuvent point donner des nombres quarrés.

Moscau d. 17. August 1744.

Wenn die numeri m et n in den bisherigen theorematibus nicht jederzeit numeros integros affirmativos angedeutet und Ew. nicht in Dero damaligem Schreiben ausdrücklich gesagt hätten, dass die 38 formulae, in welchen diese numeri m et n vorkommen, nullo modo quadrata seyn könnten, würde ich einige derselben nicht so leicht in Zweifel gezogen haben, und glaube nunmehro gern, dass sie nach der von Ew. angeführten Restriction alle richtig sind. Vielleicht wäre es aber besser, wenn man bemeldte numeros allezeit in ihrer generalen Bedeutung liesse, und z. Ex. anstatt der formula $8mn-3m+3n=aa$ (so einer Restriction nöthig hat) generaliter sagte

$$8(3m \mp 1)(3n \pm 1) - 3(3m \mp 1) + 3(3n \pm 1) = aa,$$

worin dasjenige, so bey dem theoremate essentiell ist, bestehet. Ich habe ferner observiret, dass wenn $emn - m - n$ kein quadratum seyn kann, auch $emn - n - e = \Box$, oder wenn e ein numerus integer hujus conditionis ist, dass $\frac{aa+n}{en-1}$ niemals ein numerus integer seyn kann, alsdann auch $\frac{aa+e}{en-1}$ kein numerus integer ist.

Für die mir communicirten fürtrefflichen theoremata danke ich verbundenst.

Goldbach.

P. S. Unlängst haben I. Kais. Majestät mich (wiederum praeter meritum et petitum) zum würklichen Etatsrath nebst dem appointement von 2000 R. ernennet.

LETTRE LXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Concours de Paris pour la théorie de l'aimant. Suite des recherches arithmétiques des lettres précédentes. Sommation de diverses séries.

Berlin d. 19 September 1744

— — — M. Clairaut hat mich von neuem versichert, dass bey der letzten Untersuchung der eingeschickten pièces über den Magneten, die meinige die grösste Approbation gefunden, dass aber drey von den fünf dazu ernannten Commissariis, welche Newtonianische Attractionisten seyen, in dem Gedanken stehen, dass diese Frage nimmer auf eine mathematische Art erklärt werden könne. Nach zwey Jahren müsse aber, nach den Gesetzen der Akademie, der Preis nothwendig ausgetheilt werden. Unterdessen deucht mich, dass wenn die Herren die Auflösung dieser Frage für unmöglich halten, dieselben die von neuem darauf gesetzten 2500 livres auf eine ihrem Urtheil nach mögliche und nützlichere Frage hätten setzen sollen.

Ew. Observation dass, wenn $emn - m - n = \square$, auch $emn - m - e = \square$, kann zur Entdeckung vieler neuer theorematum Anlass geben; denn wenn $emn - m - n = \square$, so wird auch, wenn man setzt $n = pmm - m$, seyn

$$epm^3 - emm - pmm = \square \text{ oder } emp - p - e = \square.$$

Ew. thun in Dero Briefe nicht die geringste Meldung, warum Dieselben die aus Dero Reise-Journal ausgeschnittenen Blätter beygefüget haben. Ich vermuthe aber, dass hiezu die series $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216} +$ etc., deren Summ von dem Hugenio $= \frac{1}{4}$ soll angegeben worden seyn, mag Anlass gegeben haben. Ich kann aber die legem progressionis dieser seriei nicht einsehen: wenn 256 anstatt 216 stehen sollte, so würde ich glauben, dass von dieser serie

$$\frac{1}{8.1} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}.\frac{6}{2}} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}.\frac{6}{2}.\frac{8}{3}} + \text{etc.}$$

die Rede wäre, deren Summ $=$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16.2} + \frac{1}{32.3} + \frac{1}{64.4} + \text{etc.} = \frac{1}{4}l2$$

und folglich kleiner als $\frac{1}{4}$. Die übrigen summas, welche Ew. in diesen Blättern aufgezeichnet, habe ich bald demonstriren können. Die formula generalis

$$\frac{anxh^{x+1} - (anx + an)h^x}{m^2h^{2x+1} + mnxh^{x+1} + (mnx + mn)h^x + n^2x^2 + n^2x}$$

resolvirt sich in

$$\frac{\frac{an}{m}x}{mh^x + nx} - \frac{\frac{an}{m}(x+1)}{mh^{x+1} + n(x+1)}.$$

Wenn nun die series, so aus dem ersten Glied entspringt,

ist $A + B + C + D +$ etc., so gibt das andere Glied diese seriem $B + C + D +$ etc., folglich ist die summa $=$

$$A = \frac{an}{mmh + mn}.$$

Was Ew. in den folgenden Blättern von den imaginariis und negativis negativorum schon vor so vielen Jahren meditiret haben, ist der Wahrheit dergestalt gemäss, dass man dadurch alle Schwierigkeiten, welche über diese Materie gemacht zu werden pflegen, aus dem Grunde heben kann.

Euler.

P. S. Dass dato numero primo hujus formae $4n+1$, allezeit eine Zahl von dieser Form $aa + 1$ gefunden werden könne, welche sich durch $4n+1$ theilen lasse, ist deswegen gewiss, weilen der numerus primus $4n+1$ allzeit eine summa duorum quadratorum ist. Denn wenn $4n+1 = pp + qq$, so können immer solche Zahlen f und g gefunden werden, dass $gp - fq = \pm 1$, oder dass der Bruch $\frac{f}{g}$ dem Bruch $\frac{p}{q}$ so nahe kommt, dass wenn man einen von dem andern subtrahirt, im Zähler nur 1 überbleibt. Wenn nun solchergestalt der Bruch $\frac{f}{g}$ gefunden worden, so ist $a = fp + gq$, oder generaliter $a = (4n+1)m \pm (fp + gq)$. Der Bruch $\frac{f}{g}$ kann aber allzeit durch meine Methode, die Brüche in kleinern Zahlen proxime auszudrücken, leicht gefunden werden. Als wenn $4n + 1 = 853$, so ist $4n + 1 = 18^2 + 23^2$ und folglich $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$. Nun stelle ich zwischen den Zahlen 23 und 18 die Operation an, welche zu Findung des maximi communis divisoris gebraucht wird, als

$$\begin{array}{rrrrrrr} 18 & 23 & 1 & & & & \\ & 5 & 18 & 3 & & & \\ & & 3 & 5 & 1 & & \\ & & & 2 & 3 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Diese quotos schreibe ich hinter einander und formire daraus folgende Brüche

$$\overset{1,}{\frac{1}{0}},\ \overset{3,}{\frac{1}{1}},\ \overset{1,}{\frac{4}{3}},\ \overset{1,}{\frac{5}{4}},\ \overset{2}{\frac{9}{7}}$$

nehmlich ein jeder numerator oder denominator, mit der obgeschriebenen Zahl multiplicirt, gibt nebst dem vorhergehenden numerator oder denominator addirt, den folgenden numerator oder denominator. Also ist

$$9 = 1.5 + 4,\ 7 = 1.4 + 3 \text{ etc.}$$

Der letzte Bruch $\frac{9}{7}$ kommt nun dem $\frac{23}{18}$ so nahe, dass die Differenz, $\frac{1}{7.18}$, durch einen Bruch exprimirt wird dessen Zähler $= 1$. Da also $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$, so ist $\frac{f}{g} = \frac{9}{7}$ und also

$$a = 9.23 + 7.18 = 333;$$

folglich $333^2 + 1$ divisibel durch 853.

Exempl. 2. Es sey $4n + 1 = 178481 = 391^2 + 160^2$, so operire ich also

$$\begin{array}{rrrrrrr} 160 & 391 & 2 & & & & \\ & 71 & 160 & 2 & & & \\ & & 18 & 71 & 3 & & \\ & & & 17 & 18 & 1 & \\ & & & & 1 & 17 & 17 \end{array}$$

$$\overset{2,}{\frac{1}{0}},\ \overset{2,}{\frac{2}{1}},\ \overset{3,}{\frac{5}{2}},\ \overset{1,}{\frac{17}{7}},\ \overset{17}{\frac{22}{9}} \ldots \frac{391}{160}.$$

Daher ist $a = 22.391 + 9.160 = 10042$, welches die kleinste Zahl ist, deren Quadrat $+ 1$ theilbar ist durch 178481, denn

$$aa + 1 = 100841765 = 178481.565.$$