Ich bin anjetzo auch mit dem Hn. Prof. Nicolao Bernoulli in Correspondenz gekommen. Diese hat bisher roulirt über die summationem serierum $1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+$ etc., worüber derselbe sehr schöne Reflexionen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe ich demselben eine kurze Methode communicirt alle differentialia hujus formae

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}}dx$$

zu integriren vel absolute, wenn möglich, vel ope logarithmorum vel quadraturae circuli. Diese Methode bestehet darin, dass man erstlich den denominatorem in seine factores simplices resolvire; weil aber öfters einige von diesen factoribus imaginarii werden, so hatte ich angemerkt, dass da alle factores imaginarii immer numero pares seyn müssen, dieselben auch so beschaffen sind, dass je zween mit einander multiplicirt, ein productum reale geben. An diesem Satz zweifelte nun letztens der H. Bernoulli, und glaubte, dass es solche formulas gebe, deren factores imaginarii nicht diese Eigenschaft hätten. Dieses zu behaupten, brachte er diese Formul $x^4-4x^3+2xx+4x+4$ als ein Exempel vor, welche nachfolgende 4 factores simplices imaginarios hatte I. $x-1-\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$, II. $x-1+\sqrt{(2+\sqrt{-3})}$, III. $x-1-\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$, IV. $x-1+\sqrt{(2-\sqrt{-3})}$, von welchen man seiner Meinung nach nicht sollte zwey finden können, welche mit einander multiplicirt ein productum reale hervorbrächten *). Dieses Exempel schien mir anfänglich meinen Satz umzustossen, als ich aber die Sach reifer überlegte, so fand ich, dass der I und III mit einander multiplicirt dieses productum reale $xx-(2+\sqrt{(4+2\sqrt{7})})x$

*) Voir dans le II vol. la 2de lettre de N. Bernoulli.

$+1+\sqrt{7}+\sqrt{(4+2\sqrt{7})}$, die zwey übrigen aber, der II und IV, dieses $xx-(2-\sqrt{(4+2\sqrt{7})})x+1+\sqrt{7}-\sqrt{(4+2\sqrt{7})}$ geben. Weilen nun durch diese Antwort das gemachte dubium gehoben wird, so vermuthe ich nun von dem Hn. Bernoulli zur Recompens eine richtige Demonstration meines Satzes: Omnem expressionem algebraicam $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+$ etc. vel in factores reales simplices $p+qx$, vel saltem in factores reales quadratos $p+qx+rxx$ resolvi posse, welcher Satz (den ich ungefähr wie einige theoremata Fermatiana, aber nicht summo rigore demonstriren kann) in der analysi von sehr grossem Nutzen ist, denn daraus folgt omnem formulam differentialem vel rationalem vel ad rationalitatem reducibilem, nisi absolute integrari queat, semper certe ope vel logarithmorum vel quadraturae circuli integrari posse.

Mit dem neuen tomo Miscellaneorum Berolin. ist man schon ziemlich weit gekommen, worin fast die ganze classis mathematica von mir kommt*). Weilen ich aber von den in Petersburg zurückgelassenen Pièces keine Copien habe, und dieselben entweder sehr spät oder gar nicht zum Vorschein kommen dürften, so nehme die Freyheit Ew. gehorsamst um Dero Rath zu bitten, wie ich am füglichsten zu denselben gelangen könnte. Ich verlange solche gar nicht, um anderwärts drucken zu lassen, denn dazu finden sich immer Materialien genug; sondern um mich darin umzusehen, damit ich nicht eine Sach zweymal zum Vorschein bringe.

Euler.

*) C'est le tome VII contenant cinq mémoires d'Euler.

LETTRE L.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Expressions qui ne peuvent jamais produire des nombres quarrés. Valeur numérique de $(l2)^2$. Nombres de Lagni et de Sharp pour la valeur de π. Globules de sang. Sur un théorème d'analyse des lettres précédentes. Sommation de quelques séries.

Moscau d. 6. Dec. 1742

In meinem vorigen Briefe hatte ich $n^2 = 4pn - p - a^2$ als einen casum particularem hujus $n^a = 4pn - p - a^2$ angenommen, welches aber darauf beruhet, dass $a^2 + 1$ durch $4n-1$ nicht dividiret werden kann. Ich gestehe, dass ich zum öftern vermuthet, es würde das theorema $4mn - m - 1 = a^2$, weil kein anderer numerus determinatus als 4 und 1 darin vorkommet, sich durch die proprietates quadratorum per quaternarium divisorum demonstriren lassen, insonderheit da man die Wahrheit des theorematis gleich einsiehet, wenn m ein numerus formae $4u + 0$ oder $4u - 3$, worin schon die Hälfte aller casuum possibilium begriffen ist; hingegegen

hat sich allezeit bei den casibus $m = 4u - 1$ und $m = 4u - 2$ eine Difficultät gefunden, bis ich endlich gestern die Demonstration folgendermaassen eingerichtet:

1. Quicunque numerus, divisus per 4, relinquit 2 vel 3, ille non est quadratus.

2. Si ulla harum quatuor aequationum impossibilium

$$\left.\begin{array}{l} A \ldots 4mn - m - 1 \\ B \ldots 4mn - m - n \\ C \ldots 4mn - m - n^2 \\ D \ldots 4mn - n - 1 \end{array}\right\} = \square$$

est vera, omnes simul verae sunt; quoniam si vera est $4mn - m - n^a$, vera etiam est $4mn - m - n^{a+1}$ et $4mn - n - m^a$, et rursus, si posteriores verae sunt, vera etiam est prima, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

3. Omnes numeri possibiles pro m et n continentur his quatuor casibus
$m = 4u + 0$, $m = 4u + 1$, $m = 4u + 2$, $m = 4u + 3$,
$n = 4v + 0$, $n = 4v + 1$, $n = 4v + 2$, $n = 4v + 3$,
sed per applicationem horum casuum apparet, quicunque sint valores ipsius m et n, semper aliquam quatuor formularum A, B, C et D ita dividi posse per 4, ut remaneat 2 vel 3. Sit enim m vel $n = 0$ (quod compendii causa scribo pro $m = 4u + 0$ et $n = 4v + 0$ et sic in ceteris), formula A vel D divisa per 4 relinquit 3.
Si m vel $n = 1$, formula A vel D divisa per 4 relinquit 2.
Si $m = 2$, $n = 2$, C divisa per 4 relinquit 2.

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} m = 2,\ n = 3, \\ m = 3,\ n = 2, \end{array}\right\} B \text{ divisa per 4 relinquit 3.}$$

$m = 3$, $n = 3$, B divisa per 4 relinquit 2.
Ergo nulla formularum A, B, C, D aequalis est quadrato.

Die Zahl, so ich pro $l2$ von Ew. communiciret bekommen, muss allerdings unrichtig abgeschrieben gewesen seyn, weil sie schon in der 14ten Ziffer fehlet, ich bin also Ew. für die weit accuratere sowohl von dem $l2$, als dessen quadrato, welche in Dero letztem Schreiben enthalten sind, verbunden.

Ein dergleichen Fehler muss gewiss auch entweder in des Mr. Lagni oder in des Hn. Sharp numerum pro quadratura circuli eingeschlichen seyn. Wenn ich mich recht erinnere, so haben Ew. diese Varietät schon längst bemerket; weil aber doch Mr. Sharp ausdrücklich saget, dass er auch von der letzten Ziffer, so weit seine Zahl gehet, gewiss sey, so glaube ich vielmehr, dass in der Zahl des M. Lagni, entweder im Drucken oder im Abschreiben, eine 6 für eine 5 gesetzt worden, welches demnach zu rectificiren wäre, wenn die in dem numero Lagniano nachfolgenden Ziffern einigen Nutzen haben sollen.

Bey dem Punct von den globulis sanguineis ist mir lieb die Confirmation meines Raisonnements zu sehen; ob man aber sicher annehmen könne, dass diese globuli mit der ganzen massa sanguinis einerley gravitatem specificam haben, zweifle ich, weil nicht allein die globuli sondern auch die lympha als partes constitutivae, sed heterogeneae, diejenige massam ausmachen, welche nach Ew. hypothesi beinahe so schwer als das Wasser ist.

Was Sie von dem theoremate

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.},$$

ergo

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

erwähnen, halte ich in der That für sehr merkwürdig, nachdem ich sehe, dass man dadurch, data summa seriei $1 \div \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \div \frac{1}{7} + \text{etc.}$, die summam seriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$ finden könne, bey welcher Gelegenheit zugleich melde, dass ich (wiewohl per ambages) auch die summas nachfolgender serierum

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{4}.\ 1 - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{25}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

gefunden habe, wozu man vielleicht durch einen viel nähern, aber mir unbekannten Weg gelangen kann.

Wie ich gänzlich mit Ew. der Meynung bin, dass man die Zahlen, welche vor n anzunehmen sind, damit, wenn $n - p$ ein numerus primus ist, auch $n + p$ ein numerus primus werde, denotante p numerum primum, nicht generaliter bestimmen könne, so halte ich auch dafür, dass die numeri 2, 4, 6, 12, etc., welche tam addita quam demta unitate numeros primos geben, schwerlich generaliter oder per certam legem progressionis dürften zu finden seyn, so dass es hoc respectu mit beiden seriebus einerley Bewandniss zu haben scheinet.

Goldbach.

P. S. Die künftigen Briefe können wieder nach St. Petersburg gesandt werden.

LETTRE LII.

═

Euler à Goldbach.

Sommaire. Continuation des recherches des lettres précédentes sur les nombres et les séries.

Berlin d. 5. Januar 1743.

— — Ew. Demonstration, dass $4mn - m - n$ kein quadratum seyn könne, will mir noch kein völliges Genüge leisten. Denn, ungeacht dass, wenn $4mn - m - 1 = \Box$, auch seyn muss $4mn - m - n = \Box$ und $4mn - m - n^2 = \Box$, so folgt doch nicht hinwiederum quibus casibus pro m et n substitutis una formula quadratum esse nequeat, iisdem casibus reliquas formulas quadrata esse non posse. Dieses erhellet aber deutlicher, wenn man die derivationem der übrigen Formuln aus der ersten betrachtet, nehmlich aus $4mn - m - 1$. Man setze also $m = 4p - 1$, so kommt $4(4np - n - p)$; wenn also $4mn - m - 1$ auf keinerley Art ein quadratum

seyn kann, so kann diese Formul auch kein Quadrat seyn, casu $m = 4p - 1$, und folglich kann auch $4np - n - p$ kein quadratum seyn. Nun aber haben Ew. nur gewiesen, dass wenn m vel n sey $= 4u + 1$, die Formul $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könne, und dahero folget daraus nicht, dass $4np - n - p$ kein Quadrat seyn könnte, eodem casu n vel $p = 4u + 1$. Ferner ist klar, dass wenn man nur bewiesen hätte, dass $4mn - m - 1 = \Box$ casu $m = 4u - 1$, daraus schon folgen würde, dass $4np - n - p = \Box$. Wenn aber bewiesen wäre, dass $4np - n - p = \Box$, so würde daraus nur folgen, dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könnte casu quo $m = 4u - 1$, aber nicht generaliter. Wenn man aber nicht beweisen könnte, dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könne casu $m = 4u - 1$, so würde daraus schon folgen, dass $4mn - m - n$ ganz und gar kein quadratum seyn könne. Vielleicht dürfte aber das theorema generale $4mnp - m - n = \Box$, wovon Ew. keine Meldung thun, leichter zu demonstriren fallen. Es ist aber für sich klar, dass wenn entweder $m + n = 4u + 1$ oder $m + n = 4u + 2$, die Formul $4mnp - m - n$ kein quadratum seyn könne; dahero nur die beiden casus $m + n = 4u$ und $m + n = 4u - 1$ zu demonstriren übrig bleiben. Wenn man für den ersten Fall setzt $m = 2u + a$ und $n = 2u - a$, so hat man zu beweisen, dass $p(4uu - aa) - u$ kein Quadrat seyn könne. Es kann also diese Formul $\frac{bb+u}{4uu-aa}$ kein numerus integer seyn. Ponatur $a = 2u - c$, so kann $\frac{bb+u}{c(4u-c)}$ kein numerus integer seyn, und hieraus können unendlich viel schöne theoremata hergeleitet werden. Ich muss indessen gestehen, dass ich aller angewandten Mühe ungeacht, noch keine Demonstration von diesem theoremate habe fin-

*

den können, dass $4mnp - m - n =$ quadrato. Es kommt aber darauf an, dass man demonstrire, dass eine solche Zahl $4paa + 1$ nimmer divisibilis seyn könne per numerum formae $4pq - 1$. Es sind aber alle mögliche divisores formulae $4paa + 1$ enthalten in einer gewissen Anzahl solcher Formuln $4np + 1$, $4np + \alpha$, $4np + \beta$, $4np + \gamma$ etc., wobey zu merken, dass wenn unter den Zahlen α, β, γ etc. eine Zahl f enthalten ist, zugleich alle potestates ipsius f darunter vorkommen; und wenn darunter zwey Zahlen f et g vorkommen, so müssen auch alle potestates einer jeden, und alle daraus möglichen producta vorkommen. Wenn man also einen oder etliche numeros pro α, β, γ etc. weiss, so kann man zugleich die übrigen finden. Die simpelsten divisores aber der Formul $4paa + 1$ sind die valores dieser Formul selbst, wenn pro a ein numerus determinatus gesetzt wird, und also hat man für α, β etc. solche valores primitivos $4p + 1$, $16p + 1$, $36p + 1$. Daher entstehen, wenn man alle potestates nimmt und solche in einander multiplicirt, alle übrigen valores litterarum α, β, γ, δ etc. Es ist aber klar, dass alle diese Zahlen von solcher Form $4mp + 1$ seyn werden. Dahero alle divisores formulae $4paa + 1$ nothwendig also seyn müssen $4np + 4mp + 1$ und kann also eine solche Zahl $4np - 1$ nimmer ein divisor seyn. Dieses ist aber nur wahr in sofern die divisores primitivi von der Form $4mp + 1$ sind. Wenn aber ein derivativus von der Form $4mp - 1$ wäre, so müsste auch ein primitivus diese Form haben. Hieraus folget nun so viel, dass wenn dieses theorema bei kleinen Zahlen wahr ist, dasselbe auch bei grossen wahr seyn müsse. — Wenn gleich Sharp sagt, dass er von seiner letzten Figur in quadratura circuli sicher sey, so kann doch solches nicht behauptet

werden, wenn er nicht zum wenigsten auf 3 oder 4 Figuren weiter hinaus gerechnet hat, welches doch nicht geschehen. Dahero dieses schon als ein Merkmal der Accuratesse zu halten, dass seine letzte Figur nur um 1 zu klein ist. Ich kann mich auch nicht erinnern, dass ich jemals um dieser Ursach willen an der Richtigkeit des Lagni's Zahlen gezweifelt habe. — Bey der Materie über die globulos sanguineos habe ich nicht so genau angenommen, dass die globuli rubri mit der ganzen massa einerley gravitatem specificam haben; denn meine Reflexionen bleiben einerley, wenn gleich dieselbe 2 oder mehr mal grösser oder kleiner angenommen würde. Unterdessen ist doch so viel gewiss, dass die gravitas specifica der globorum rubrorum nicht so sehr viel vom Wasser differiren wird; es wäre denn, dass man dieselben niemals pur ohne Vermischung der lymphae bekommen könnte, in welchem Fall es freylich nicht mehr auf die gravitatem specificam allein ankommen würde um die Unmöglichkeit des progressus in infinitum zu zeigen.

Ich hatte dieses theorema: Si

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.},$$

erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

dem Hn. Professori Nicolao Bernoulli geschrieben, wovon er mir nachfolgende schöne Demonstration zugeschickt. Er schreibt x^n für a, und t für sx, eritque

$$sx = t = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \text{etc.}$$

qua differentiata prodibit $dt = dx(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{etc.})$.

Diese zwey series multiplicirt er mit einander, terminos secundum potestates ipsius x ordinando, und bekommt

$$tdt = dx\left(x + x^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right.$$
$$\left. + x^{3n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right) + \text{etc.}\right.$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}s^2x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.};$$

dividatur per xx, et ob $x^n = a$ erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

Er geht auf diese Art weiter und multiplicirt $\frac{1}{2}tt$ nochmal mit dt und findet post integrationem

$$\frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6} + \frac{a}{n+3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)$$
$$+\frac{aa}{2n+3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right)$$
$$+\frac{a^3}{3n+3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\left.+\frac{1}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)\right) + \text{etc.}$$

Um nun auf solche summationes zu kommen, dergleichen Ew. gefunden, so sey $n = 1$, erit

$$s = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \text{etc.} = \frac{1}{a}l\cdot\frac{1}{1-a}$$

unde fit

$$A\cdots\frac{1}{2aa}\left(l\cdot\frac{1}{1-a}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{a}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{a^3}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

Sit $n = 2$, erit $s = 1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{5} + \frac{a^3}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{2\sqrt{a}}l\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ unde fit

$$B\cdots\frac{1}{8a}\left(l\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{a^2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$$
$$+\frac{a^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

Sit $n = 2$ et $a = -b$, erit $s = 1 - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{b^3}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{\sqrt{b}}A.\,\text{tang.}\,\sqrt{b}$, unde fit

$$C\cdots\frac{1}{2b}(A.\text{tang}\,\sqrt{b})^2 = \frac{1}{2} - \frac{b}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{b^2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$$
$$-\frac{b^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

Ponatur in A, $a = -1$; et in C, $b = 1$, ob $A.\text{tang.}\,1 = \frac{\pi}{4}$, erit

$$D\cdots\frac{1}{2}(l\,2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

$$E\cdots\frac{\pi\pi}{32} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

$$F\cdots\frac{1}{8}(l2)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) - \text{etc.}$$

$$E - F\cdots\frac{\pi\pi}{32} - \frac{1}{8}(l2)^2 =$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

$$E+F\ldots\frac{\pi\pi}{32}+\frac{1}{8}(l2)^2=$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}$$

Si D subtrahatur a serie

$$\frac{\pi\pi}{12}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

erit

$$G\ldots\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

Quoniam si fuerit $s=a-b+c-d+e-\text{etc.}$ et $t=a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.}$, erit summa factorum ex binis terminis seriei $s=\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}t$ eritque adeo

$$\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}t=-b.a+c(a-b)-d(a-b+c)+$$
$$e(a-b+c-d)-\text{etc.}$$

addendo t erit

$$\frac{1}{2}ss+\frac{1}{2}t=aa-b(a-b)+c(a-b+c)-d(a-b+c-d)$$
$$+e(a-b+c-d+e)-\text{etc.}$$

Sit $s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{etc.}$, erit $s=l2$ et $t=\frac{\pi\pi}{6}$,

unde fit

$$H\ldots-\frac{1}{2}(l2)^2+\frac{\pi\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}=G.$$

$$I\ldots\frac{\pi\pi}{12}+\frac{1}{2}(l2)^2=1.1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

$$D+H\ldots\frac{\pi\pi}{12}=1-\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\text{etc.}$$

seu

$$\frac{\pi\pi}{12}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{21}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$$
$$+\frac{1}{36}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}$$

Hier sind nun die beiden series G und I die beiden erstern, welche Ew. überschrieben.

Es ist bey der series $1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{16}+\frac{x^4}{25}+\frac{x^5}{36}+\text{etc.}$ merkwürdig, dass dieselbe nur in drey Fällen summirt werden kann, welche sind $x=1$, $x=-1$ und $x=\frac{1}{2}$. Der letztere casus folgt aber aus der serie G kraft dieses theorematis: Si $s=1.a-\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{3}(a+b+c)-\text{etc.}$ erit $s=\frac{a}{1.2}+\frac{1}{2.4}(a-b)+\frac{1}{3.8}(a-2b+c)+\frac{1}{4.16}(a-3b+3c-d)$ $+\frac{1}{5.32}(a-4b+6c-4d+e)+\text{etc.}$ Wenn nun für $a+b+c+d+\text{etc.}$ diese series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}$ gesetzt wird, so ist $s=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2$. Um aber zu finden, was diese Expression

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

betrage, so setze ich

$$z=x-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

und differentiando wird

$$dz=dx\left(1-\frac{n}{1}\cdot x+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot x^2-\text{etc.}\right)=dx(1-x)^n,$$

dahero integrando $z=\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$ und facto $x=1$ fit

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}=\frac{1}{n+1}.$$

Dahero ist

$$\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2=\frac{1}{1^2.2}+\frac{1}{2^2.4}+\frac{1}{3^2.8}+\frac{1}{4^2.16}+\frac{1}{5^2.32}+\text{etc.}$$

Was aber Ew. beide letztern series betrifft, nehmlich

$$p=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

$$q=\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{25}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

so ist klar, dass

$$p-q=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}\right)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{\pi\pi}{12}l2$$

und also wenn die Summ von einer bekannt wäre, daraus die andere gleich summirt werden könnte. Es ist zwar

$$\frac{13}{1440}\pi^4=1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

ich habe aber noch keinen Weg entdecken können, um die valores p et q zu bestimmen, dahero von Ew. die Methode diese series zu summiren mit grossem Verlangen erwarte. Wenn Ew. hernach auch diese seriem

$$r=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

summiren könnten, so würden die beyden series $p+r$ die schon längst gesuchte summam dieser seriei

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}$$

geben.

Euler.

P. S. Mr. Clairaut hat mir nun geschrieben, dass meine nach Paris geschickte pièce zu rechter Zeit glücklich angekommen.

LETTRE LIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre 51ème. Sommation des séries de Goldbach. Démonstration d'un théorème de la théorie des nombres.

Berlin d. 19 Januar 1743.

Ew. haben in der That den gemeldeten Schreibfehler als ein grosses Glück anzusehen, wenn derselbe zu solchen herrlichen Erfindungen Anlass gegeben. Es hat mich viele Stunden und grosse calculos gekostet, ehe ich nur die Wahrheit der mir gütigst communicirten Summationen habe einsehen können. Ich kann mich aber auch nicht weiter rühmen, als dass ich dieselben demonstrirt habe. Die Methode, wodurch ich dazu gelanget, ist ziemlich weit hergesucht und so beschaffen, dass ich auch vermittelst derselben diese summas nimmer würde herausgebracht haben, wenn mir solche nicht schon vorher aus Ew. Schreiben bekannt gewesen wären. Ich habe aber nachfolgende series zu Hülfe genommen:

$$A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} \qquad B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} \qquad D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.}$$

$$E = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} \qquad F = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{etc.}$$

$$G = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.} \qquad H = 1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \text{etc.}$$

etc.

von welchen die summae A, C, E, G, etc. bekannt sind. Aus diesen habe ich endlich mit grosser Mühe folgende hergeleitet:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = \frac{1}{2}AA.$$

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AC - \frac{1}{2}BB.$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AE - BD + \frac{1}{2}CC.$$

$$\delta = 1 + \frac{1}{2^9}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.} = AG - BF + CE - \frac{1}{2}DD.$$

etc.

$$a = 1 + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = \frac{1}{2}AA + \frac{1}{2}C.$$

$$b = 1 + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \text{etc.} = BB - \frac{1}{3}E.$$

Porro si $aa + 1$ per nullum numerum primum formae $4n - 1$ fuerit divisibile, etiam per nullum numerum compositum formae $4n - 1$ divisibile erit. Si enim $4m - 1$ non fuerit numerus primus, unum saltem factorem primum habebit formae $4n - 1$. — Cum igitur $aa + 1$ per $4n - 1$ dividi nequeat, haec aequatio $aa + 1 = (4n - 1)(4m - 1)$ erit impossibilis, ideoque $aa = 16mn - 4m - 4n$, seu $4mn - m - n =$ quadrato. $Q.E.D.$

LETTRE LIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Racines imaginaires. Théorèmes de nombres. Sommation des séries.

St. Petersburg d. 5. Febr. 1745.

Wenn dasjenige, was Ew. von den radicibus imaginariis melden, demonstriret werden könnte, so müsste auch folgen, dass posito c imaginario quocunque, f reali quocunque, und $c\sqrt{(4c^4 - f)} = r =$ numero reali, $m = \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)}$, $n = \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}$, sowohl $m + n$ als $c(m - n)$ reales sind. Es stünde solchemnach etwa der casus $x^4 + 72x - 20$ zu untersuchen, allwo die 4 divisores sind, positis

$$c = 1 + \sqrt{-2},\ f = -20,\ \sqrt{(4c^4 - f)} = \frac{r}{4c} = \frac{18}{1+\sqrt{-2}},$$

$$\text{I. } x + c + \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};\ \text{II. } x + c - \sqrt{\left(-c^2 + \frac{r}{c}\right)};$$

$$\text{III. } x - c + \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)};\ \text{IV. } x - c - \sqrt{\left(-c^2 - \frac{r}{c}\right)}.$$

Auf Dero anderes Schreiben vom 5. Januar habe ich zu antworten, dass die Objection, welche Ew. bey $4mn - m - 1 = \Box$ und den andern Formuln machen, schon damals zum Theil von mir bemerkt worden, wiewohl ich meynte, dass selbige leicht würde zu solviren seyn. Jedoch glaube ich, dass alles viel kürzer und ohne dergleichen casus particulares zu Hülf zu nehmen, demonstriret werden kann. Vorhero aber will nur ad verba: *Ferner ist klar, dass wenn man nur bewiesen hätte, dass* $4mn - m - 1 = \Box$ *casu* $m = 4u - 1$, *daraus schon folgen würde, dass* $4np - n - p = \Box$. *Wenn aber bewiesen wäre, dass* $4np - n - p = \Box$, *so würde daraus folgen, dass* $4mn - m - 1$ *kein quadratum seyn könne casu quo* $m = 4u - 1$, *aber nicht generaliter*, — diese kleine Erinnerung machen, dass nicht allein B . . . $4np - n - p = \Box$ ein casus particularis von $A \ldots 4mn - m - 1 = \Box$, sondern auch A ein casus particularis von B ist, welches natürlicherweise contradictorium seyn würde, wenn das $\Box$ in A und B idem quadratum determinatum bedeutete; nun aber, da es in beyden Fällen diversos valores hat, gar wohl bestehen kann; denn gleich wie aus dem casu particulari ipsius A, ubi $m = 4u - 1$, die formula $4(4nu - u - n)$, oder diese aequivalens $B \ldots 4nu - n - u = \Box$ entspringet, so kömmt aus dem casu particulari ipsius B, wenn u gesetzt wird $= 4n^2 p - n$, die formula $4np - p - 1 = \Box$ heraus, welche posito p pro numero integro quocunque, die formulam A gibt, wie denn auch generaliter $4mn - m - n^{2a-1} = \Box$ durch die Substitution $m = 4n^{2a} p - n^{2a-1}$ alsofort in $4np - p - 1 = \Box$ verwandelt werden kann.

Hier sollte die neue Demonstration folgen; weil sie mir aber nach besserer Ueberlegung selbst kein Genüge thut, so muss dieser Punkt bis auf eine andere Zeit ausgesetzt

bleiben. Indessen habe ich angemerket, dass die propositio $4pmn - m - n = \Box$ per substitutionem $m = 4n^2 q - n$, in hanc similem $4npq - p - q = \Box$ verwandelt wird.

Aus der mir communicirten Demonstration des theorematis: Si $s = 1 + \frac{a}{n+1} + \text{etc.}$, erit

$$\frac{1}{2} ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \text{etc.}$$

erhellet zugleich die grosse Einsicht des Hn. Autoris in dergleichen Sachen, und die unterschiedenen applicationes, so Ew. von dem theoremate selbst machen, halte ich für sehr merkwürdig. Die summae serierum G et I sind eben diejenigen, so ich gefunden hatte; die summa $D + H$ war mir auch bekannt.

Dass die summae serierum

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.}$$

und

$$q = \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \text{etc.}$$

so ich gefunden zu haben vermeinet, aus einem blossen Schreibfehler entstanden wären, habe ich selbst schon in meinem letzten Schreiben erinnert; ich hätte dahero auch an selbige series nicht gedacht, wenn ich sie nicht in Dero Schreiben wiederholet gesehen, worauf ich denn alsofort befunden, dass beyder summa von

$$z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

dependiret. Ew. inferiren mit grössestem Recht, dass wenn ich die seriem

$$r = \frac{1.1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.}$$

auch summiren könnte, alsdann $z = p + r$ gefunden seyn würde. Nun lässet sich zwar die series r gar schön summiren, denn sie ist $=\frac{(\pi^2-3)l2}{6}$, aber p weiss ich nicht anders zu exprimiren als durch $z-r$. Ich hatte auch in meinem vorigen geschrieben, dass ich die summam seriei

$$1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.}$$

noch nicht wüsste; selbige aber dependiret gleichfalls von der summa z, und ist $=-\frac{z^2}{2}+\frac{\pi^6}{2.3^3.7}$.

Aus Ew. letztem Schreiben vom 19. Januar ist mir lieb gewesen zu ersehen, dass die series α, β und b nicht von den leichtesten zu summiren sind. Was nun die series α und $2\beta+b$ betrifft, so kommen unsere methodi darin völlig überein, dass $\alpha=\frac{1}{2}AA$ und $2\beta+b=\frac{19\pi^6}{2.3^4.5.7}$; hierin aber sind sie unterschieden, dass Ew. Methode gibt

$$\beta=AC-\frac{1}{2}BB,\quad b=BB-\frac{1}{3}E,$$

meine hingegen

$$\beta=\frac{\pi^6}{2.3^3.7}-\frac{BB}{2},\quad b=BB-\frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7}.$$

Den valorem $p=\frac{1}{2}BB+\frac{1}{2}E$ finde ich richtig, die übrigen habe noch nicht untersuchet. Meine Methode werden Ew. aus nachfolgendem einigen schemate gnugsam pro omnibus seriebus huic similibus ersehen können: Sit

$$A=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{6},\quad C=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{90}$$

erit duplum summae productorum ex binis terminis seriei A aequale A^2-C; sed hoc duplum etiam est aequale sequentibus seriebus

$$+2\left(\frac{1}{1^2.2^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{3^2.4^2}+\frac{1}{4^2.5^2}+\text{etc.}\right)$$

$$\begin{array}{llll} & \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \\ =2\Big(& \frac{\pi^2}{3.1^2} & -2 & -1\Big) \end{array}$$

$$+2\left(\frac{1}{1^2.3^2}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{3^2.5^2}+\frac{1}{4^2.6^2}+\text{etc.}\right)$$

$$\begin{array}{llll} & \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \\ =2\Bigg(& \frac{\pi^2}{3.2^2} & -\frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2^3} & -\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)}{2^2}\Bigg) \end{array}$$

$$+2\left(\frac{1}{1^2.4^2}+\frac{1}{2^2.5^2}+\frac{1}{3^2.6^2}+\frac{1}{4^2.7^2}+\text{etc.}\right)$$

$$\begin{array}{llll} & \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} \\ =2\Bigg(& \frac{\pi^2}{3.3^2} & -\frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^3} & -\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)}{3^2}\Bigg) \end{array}$$

etc.

Wenn nun die drey columnae perpendiculares besonders summiret werden, so entstehet

(I) $\frac{2\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)=\frac{2\pi^4}{3.6}$

(II) $-4\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\text{etc.}\right)$

(III) $-2\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\text{etc.}\right)$

Die letzte series aber ist bekanntermaassen gleich $\frac{-7\pi^4}{180}$, also muss die mittlere seyn $A^2-C-\frac{2\pi^4}{3.6}+\frac{7\pi^4}{180}=\frac{-10\pi^4}{180}$ oder

$$1+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{1}{64}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{72}.$$

Dass das theorema $4mn-m-1=\square$ von Ew. schon längst demonstriret worden, habe ich nicht vergessen; es ist aber nur die Frage gewesen, ob man es nicht noch auf eine andere Art demonstriren könne?

Goldbach.

LETTRE LV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Rectification d'une erreur commise dans la lettre précédente. Observations ultérieures sur la sommation des séries.

---

d. 12 Februar 1745.

Da ich anjetzo nach Königsberg schreibe, so habe Gegenwärtiges, als Postscriptum zu meinem letzten Briefe an Ew. mit absenden und zugleich einen abermal eingeschlichenen Fehler corrigiren wollen, denn die summa

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.}$$

ist nicht $z - \frac{\pi^2 l2}{6} + \frac{l2}{2}$, sondern $z - \frac{\pi^2 l2}{6} + u$, wenn

$$u = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

Setzet man ferner

$$v = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.},$$

so wird $u + v = \frac{\pi^2 l2}{3}$.

Sonst habe ich auch observiret, dass wenn man setzet

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{3}{1.2} + \frac{5}{2.3}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{7}{3.4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{9}{4.5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \text{etc.}$$

alsdann seyn werde

$$\frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

Ich weiss nicht, ob dergleichen casus bishero sonderlich betrachtet worden, ubi series $= \infty$ dividitur per aliam seriem $= \infty$. Ich mag mir nicht die Mühe nehmen zu sehen, was per actualem divisionem der seriei B durch $2A$ vor termini herauskommen möchten, weil ich vermuthe, dass dieselben sehr confus aussehen werden.

Wenn man ferner setzet

$$= 1C + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \text{etc.}$$

so wird $\frac{C}{A} = \frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$, woraus aber nicht folget, dass $2C = B$, sondern nur dass $2C - B$ ein infinite parvum sey respectu ipsius B vel C.

Goldbach.

LETTRE LVI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réponse aux deux lettres précédentes. Mêmes sujets.

Berlin d. 26. Februar 1743.

— — Die über die Akademie hochverordnete Commission hat mir letztens die versprochene Pension auf das Gnädigste confirmirt und der Hr. Admiral Graf Golowin pressirt mich sehr meine Scientiam navalem nächstens gegen eine ansehnliche Recompens einzuschicken. Ich habe solche völlig zu Ende gebracht und nur um Erlaubniss gebeten, solche vorher abschreiben zu lassen.

Was ich von den radicibus imaginariis aequationum gemeldet, dass dieselben immer dergestalt paarweis genommen werden können, dass sowohl das Product als die Summ von zweien real werde, kann ich zwar nicht generaliter demon-

striren, aber doch von allen aequationibus sexto gradu inferioribus, ingleichen auch von dieser weit generaleren aequatione $\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^{n} + \zeta = 0$, denotante n numerum integrum quemcunque. Dahero der von Ew. gemeldete casus keine Schwierigkeit hat. Ich glaube aber, dass in den Expressionen ein kleines Versehen seyn muss, weilen dieselben nicht zusammenstimmen; denn wenn $c = 1 + \sqrt{-2}$ und $f = -20$, so wird $\sqrt{(4c^4 - f)} = \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{-2}}$ und nicht $= \frac{18}{1+\sqrt{-2}}$. Ich bin den Spuren Ew. nachgegangen, und glaube, dass Dieselben auf diese Aequation gekommen seyn würden

$$x^4 + 8(\alpha\alpha + \beta\beta)x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 12\alpha^4 - 40\alpha^2\beta^2 + 12\beta^4 = 0,$$

welche erstlich in diese zwey factores imaginarios resolvirt wird

$$xx + 2(\alpha + \beta\sqrt{-1})x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2(\beta\beta - \alpha\alpha)$$
$$- 2(\alpha - \beta\sqrt{-1})\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} = 0$$
$$xx - 2(\alpha + \beta\sqrt{-1})x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2(\beta\beta - \alpha\alpha)$$
$$+ 2(\alpha - \beta\sqrt{-1})\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} = 0,$$

dahero die 4 radices sehr complicat seyn würden. Demungeacht aber ist eben dieselbe Aequation auch ein Product von diesen zweyen factoribus realibus

$$xx + 2x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 6\beta\beta - 2\alpha\alpha = 0$$
$$xx - 2x\sqrt{2(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 2\beta\beta - 6\alpha\alpha = 0$$

woraus die Wahrheit meines Satzes erhellet. Ueberhaupt aber, wenn zwey factores imaginarii in se ducti dieses productum reale $x^4 + Bxx + Cx + D$ herausbringen sollen, so müssen dieselben also beschaffen seyn

$$xx + (b + c\sqrt{-1})x - aa - ab + bc\sqrt{-1} + ac\sqrt{-1}$$
$$xx - (b + c\sqrt{-1})x - aa + ab + bc\sqrt{-1} - ac\sqrt{-1}$$

Nun aber kann das productum dieser zwey factorum imaginariorum auch in diese zwey factores reales resolvirt werden $xx + 2ax + aa - bb)(xx - 2ax + aa + cc)$. Gleichergestalt wenn eine Aequation nachfolgende 4 radices imaginarias hát

I. $x = p + q\sqrt{-1} + \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$

II. $x = p + q\sqrt{-1} - \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$

III. $x = p - q\sqrt{-1} + \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$

IV. $x = p - q\sqrt{-1} - \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$

um abzukürzen, setze ich $pp - qq - r = t$, $2pq - s = u$, so wird erstlich $\sqrt{(tt + uu)} \pm t$ allzeit eine quantitas positiva, und folglich $\sqrt{(\pm t + \sqrt{(tt + uu)})}$ eine quantitas realis seyn. Dieses vorausgesetzt, so ist die summa radicum $\mathrm{I} + \mathrm{III} = 2p + \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$; summa $\mathrm{II} + \mathrm{IV} = 2p - \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}$; productum radicum

$$\begin{aligned}\mathrm{I}.\mathrm{III} = pp + qq + p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)}\\ + q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})}\end{aligned}$$

productum radicum

$$\begin{aligned}\mathrm{II}.\mathrm{IV} = pp + qq - p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)}\\ + q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})},\end{aligned}$$

welches alles quantitates reales sind.

Ew. transformatio formulae $4pmn - m - n = \square$ in hanc $4npq - p - q = \square$ ope substitutionis $m = 4n^2q - n$ kann ein grosses Licht zur Demonstration geben. Denn wenn man nur demonstriren könnte dass $4pmn - m - n$ kein Quadrat sey, wenn m eine Zahl ist von dieser Art $4nnq - n$, so würde zugleich demonstrirt seyn dass $4pmn - m - n$ nullo modo ein Quadrat seyn könne. Eine gleiche Transformation geht auch an durch diese Substitution

$$m = (4np)^{2\alpha}x - \frac{n((4np)^{2\alpha} - 1)}{4np - 1}$$

oder

$$m = 4nn(4np)^{2\alpha}y - \frac{n((4np)^{2\alpha+1} - 1)}{4np - 1}.$$

Ich kann auf keine Weise herausbringen, dass diese series

$$r = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \text{etc.} = \frac{(\pi\pi - 3)l2}{6};$$

denn da alle termini evoluti von dieser Form $\frac{1}{xx(x+n)}$ sind, und $\frac{1}{xx(x+n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{xx} - \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{(x+n)}$, so folget nach der von Ew. mir gütigst communicirten Methode, dass

$$r = \frac{\pi\pi l2}{6} - 1 + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \text{etc.};$$

also müsste seyn

$$\frac{1}{2}l2 = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \text{etc.}$$

Ich finde aber die summam dieser series per approximationem $= 0{,}7504$, und folglich grösser als $l2$.

Dass diese series

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \text{etc.} = AC - \frac{1}{2}BB$$

habe auch durch Ew. Methode gefunden. Dass ich also die Summ $\frac{\pi^6}{2.3^3.7} - \frac{1}{2}BB$ für verdächtig halte, weilen proxime $\frac{\pi^6}{2.3^3.7} = 2{,}54335$ und $\frac{1}{2}BB = 0{,}72247$, und also der valor für β viel zu gross herauskäme, dieses wird noch mehr bestätigt, wenn Ew. angeben

$$\begin{aligned}b &= 1 + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \text{etc.}\\ &= BB - \frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7},\end{aligned}$$

denn da $BB = 1{,}444940$ und $\frac{11\pi^6}{2.3^4.5.7} = 1{,}86513$, so würde b negativum werden.

Für die von Ew. mir gütigst communicirte Methode sage tausendfältigen Dank, indem dieselbe weit leichter und natürlicher auf diese series leitet, als diejenige, welche ich gebrauchet und sehr embarassant ist. Um aber diese herrliche Methode auf die folgenden casus zu appliciren, so habe dieses Lemma gebraucht

$$\frac{1}{x^n(x+a)^n} = \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{n}{a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)}{1.2.a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.a^{n+3}}\left(\frac{1}{x^{n-3}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-3}}\right) + \text{etc.}$$

bis man ad potestates primas ipsarum x et $x+a$ kommt. Von den signis ambiguis gelten die oberen, wenn n ein numerus par ist, sonst die unteren. Wenn auch ungleiche dignitates mit einander multiplicirt werden, so dienet dieses Lemma: $\frac{1}{x^m(x+a)^n} \pm \frac{1}{x^n(x+a)^m}$

$$= \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{(x+a)^m}\right) - \frac{n}{1.a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{m-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{m-1}}\right)$$
$$+ \frac{n(n+1)}{1.2.a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{m-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{m-2}}\right) - \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{a^m}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{m}{1.a^{m+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)$$
$$+ \frac{m(m+1)}{1.2\,a^{m+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right) - \text{etc.}$$

Wenn man nun setzt $P = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc.}$, $Q = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$ et $Z = 1 + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \frac{1}{4^{m+n}} + \text{etc.}$, so findet sich

$$PQ - Z = + \frac{1}{1.2^m} + \frac{1}{2^n.3^m} + \frac{1}{3^n.4^m} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.2^n} + \frac{1}{2^m.3^n} + \frac{1}{3^m.4^n} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.3^m} + \frac{1}{2^n.4^m} + \frac{1}{3^n.5^m} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.3^n} + \frac{1}{2^m.4^n} + \frac{1}{3^m.5^n} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{1.4^m} + \frac{1}{2^n.5^m} + \frac{1}{3^n.6^m} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{1.4^n} + \frac{1}{2^m.5^n} + \frac{1}{3^m.6^n} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Wenn man nun sowohl gleiche als ungleiche dignitates mit einander multiplicirt, wie Ew. unfehlbar werden gethan haben, so finde, wie schon vorher gemeldet, $\beta = AC - \frac{1}{2}BB$ und $b = BB - \frac{1}{3}E$ und wenn man weiter geht und setzt

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \text{etc.}$$
$$\beta = 1 + \frac{1}{2^6}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \text{etc.}$$
$$\gamma = 1 + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \text{etc.}$$

so findet sich $\gamma = AE - BD + \frac{1}{2}CC$ und $2\alpha + 5\beta = 10BD - \frac{9}{2}CC$, wo A, B, C, D, etc. die vorgemeldten valores behalten.

Die series $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$ will sich noch auf keine Art tractiren lassen. Ich fand letztens per approximationem, dass $BB = A - \frac{1}{5}$, welches ziemlich genau eintrifft, aber doch nicht Stich hält, denn es ist

$$BB = 1{,}44494079843 \text{ und } A = 1{,}64493406684,$$
$$A - \frac{1}{5} = 1{,}44493406684 \text{ und } BB = A - \frac{1}{5} + \frac{673}{100000000}.$$

Inzwischen ist der nexus zwischen dieser Serie

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

und den längst bemerkten Brüchen

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{10},\ \frac{5}{6},\ \frac{691}{210},\ \frac{35}{2} \text{ etc.}$$

remarquabel; denn wenn

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{691}{210} + \frac{35}{2} - \text{etc.}$$

so ist $B = 1 + \frac{1}{2}s$. Der Beweis davon steht in meiner Dissertation: *De inventione termini summatorii ex dato termino generali.* Denn, wenn man setzt $z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots \frac{1}{x^3}$, und $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.}$ in infinitum, so wird

$$B = Z + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^8} - \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2x^{10}}$$
$$+ \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2x^{12}} - \frac{691}{210}\cdot\frac{1}{2x^{14}} + \text{etc.}$$

Wenn man also für x eine beliebige Zahl, als 10, nimmt, so kann man per additionem actualem Z finden: es wird nehmlich

$$Z = 1{,}197531985674193251668686286978 0$$

dahero ist

$$B = Z + \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{40000} - \frac{1}{12000000} + \frac{1}{1200000000} - \text{etc.}$$

und wird

$$B = 1{,}202056903159594.$$

Gleichergestalt können auch die summae serierum reliquarum potestatum gefunden werden, nachdem man einige terminos ab initio actu addirt hat. Als es sey

$Z = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots \frac{1}{x^n}$ und $N = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \text{etc. in inf.}$

so wird

$$N = Z + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{1.2.x^n} + \frac{n}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2x^{n+1}}$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{6x^{n+3}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+4)}{1.2.3\ldots7}\cdot\frac{1}{6x^{n+5}}$$
$$- \frac{n(n+1)\ldots(n+6)}{1.2.3\ldots9}\cdot\frac{3}{10x^{n+7}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+8)}{1.2.3\ldots11}\cdot\frac{5}{6x^{n+9}}$$
$$- \frac{n(n+1)\ldots(n+10)}{1.2.3\ldots13}\cdot\frac{691}{210x^{n+11}} + \text{etc.}$$

Durch diese Regel habe ich nachfolgende summas vero proximas gefunden

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \text{etc.} = 1{,}6449340668482264 36 = A$$
$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{etc.} = 1{,}202056903159594281 = B$$
$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.} = 1{,}082323233711138191 = C$$
$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \text{etc.} = 1{,}036927755106863293 = D$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \text{etc.} = 1{,}017343061984449139 = E$$
$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \text{etc.} = 1{,}008349277386601872 = F$$
$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \text{etc.} = 1{,}004077356197944339 = G$$
$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \text{etc.} = 1{,}002008392826082210 = H$$
$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \text{etc.} = 1{,}000994575127618085 = I$$
$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \text{etc.} = 1{,}000494188604194651 = K$$
$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.} = 1{,}000246086553308048 = L$$
$$1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \text{etc.} = 1{,}000122713347585744 = M$$
$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \text{etc.} = 1{,}000061248135058704 = N$$
$$1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \text{etc.} = 1{,}000030588236307020 = O$$
$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \text{etc.} = 1{,}000015282259408657 = P$$

Bald wird der 7[te] tomus von den hiesigen Miscellaneis zum Vorschein kommen, welcher ziemlich stark seyn wird, indem ich allein in der mathematischen Class auf 28 Bogen habe. Darunter ist eine grosse pièce von dem Cometen des vorigen Jahres und eine neue Art die series

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.}$$

zu summiren, welche bloss allein durch Differentiation geschiehet. — Vor etlichen Wochen hat man wiederum einen Cometen allhier gesehn, welcher aber ohne Schwanz und sehr klein war, auch nur 10 Tage lang aus dem Dracone durch Ursam majorem in Leonem minorem gehend observirt worden; es ist aber keine so accurate Observation gemacht worden, wodurch man seinen Lauf bestimmen könnte. Die Opera Joh. Bernoullii omnia werden bald aus der Presse kommen und unserm König dedicirt werden. Es nimmt mich sehr Wunder ob Ew. mit der Akademie in gar keiner Connexion mehr stehen.

Euler.

LETTRE LVII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 28 März 1743.

Endlich stellet sich die demonstratio nova ein, so im Folgenden bestehet:

Lemma 1. Si aequatio $B \ldots 4mn - m - 1 = a^2$ non est possibilis casu quo m est numerus hujus formae $4u - 1$, neque ullo alio casu ipsius m erit possibilis, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

Lemma 2. Si vera est aequatio B, vera etiam erit $C \ldots 4Mn - M - 1 = A^2$, posito $M = 2a + m + 4n - 1$, fiet enim $A = a + 4n - 1$.

Sed aequatio C non potest fieri vera, nisi M sit numerus hujus formae $4v - 1$ (per lemma 1), erit igitur $M = 4v - 1 = 2a + 4n - 1 + 4u - 1$, ergo $4v = 2a + 4n + 4u - 1$, hoc est numerus par $=$ numero impari, quod est absurdum, ergo et aequatio B est absurda.

Similiter de aequatione $D \ldots 4pmn - m - n = a^2$ judicandum est, quae vera esse non potest, nisi sit m hujus formae $4n^2 q - n$ (ut in superioribus litteris ostensum fuit), quo facto erit $4pnM - M - n = A^2$, si ponatur

$$M = ((4pn - 1) + 2a + m), \quad A = (4pn - 1) + a.$$

Sed quia m est hujus formae $4n^2 q - n$ et M hujus formae $4n^2 Q - n$, habebitur $4pn - 1 + 2a + 4n^2 q = 4n^2 Q$, hoc est numerus impar $=$ numero pari, quod est absurdum, ergo et aequatio D est absurda.

Was ich von den radicibus imaginariis erinnern wollen, gehet eigentlich dahin, dass weil die vier folgenden radices:

$$x = \begin{cases} -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{aa}{4} + \sqrt{\left(\frac{a^4}{4} - f\right)}\right)} \\ +\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{aa}{4} - \sqrt{\left(\frac{a^4}{4} - f\right)}\right)} \end{cases}$$

in se ductae $x^4 \pm 2a\left(\frac{a^4}{4} - f\right)^{\frac{1}{2}} x + f = 0$ geben, folglich auch so oft als f und $2a\sqrt{\left(\frac{a^4}{4} - f\right)}$ numeri reales sind, zweene von gemeldten radicibus in se ductae numeros reales hervorbringen müssen; wenn aber Ew., wie Sie in Dero letztern Schreiben melden, die Wahrheit Ihres asserti von allen aequationibus quartae potestatis demonstriren können, so cessiret das angeführte dubium von selbsten.

Aus den in Ew. Schreiben beygebrachten Umständen sehe ich wohl, dass die von mir angegebene summa aus einem Irrthum entstanden, wobey ich die von M. Vaugelas in den *Remarques sur la langue française* gemachte Erinnerung appliciren muss, wenn er saget, dass im Fall es sich finden sollte, dass er selbst anders geschrieben, als er nach seinen

Remarques hätte schreiben sollen, man alsdann nicht seinem Exempel, sondern seinen Regeln zu folgen habe. Es ist mir also sehr lieb, dass Ew. an meiner Methode etwas Gutes gefunden, ohngeachtet in die von mir angeführten Exempel einige Fehler eingeschlichen sind.

Wäre mir Ew. lemma, wodurch $\frac{1}{x^m (x+a)^n}$ in andere series resolviret wird, eher bekannt gewesen, so hätte ich die erwähnten summas viel leichter und ordentlicher finden können. Ich habe indessen angemerket, dass wenn die summa seriei, deren formula generalis ist $\frac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen und $= a$ gesetzt wird, alsdann jede series, cujus terminus generalis est $\frac{1}{(6x+p)^2}$, ubi p sit numerus quicunque integer, exprimiret werden kann per a et quadraturam circuli, hingegen kann ich die series hujus formae $\frac{1}{(12x+p)^2}$, dato p numero quocunque, nicht anders ad quadraturam circuli reduciren, als cognitis summis trium casuum $p = 11$, $p = 10$, $p = 9$, aut aliorum trium his aequivalentium.

Es wird Ew. vermuthlich nicht schwer seyn Ihr lemma auch auf $\frac{\alpha x^{2n-2} + \beta x^{2n-3} + \gamma x^{2n-4} + \text{etc.}}{(px+q)^n (px+r)^n}$ zu extendiren; so ist z. Ex. positis $p = 4$, $q = -3$, $r = \div 1$, die summa seriei $\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(4x-3)^2 (4x-1)^2} = \frac{\alpha(64u + \pi^2 - 6\pi)}{2^9} + \frac{\beta(16u + \pi^2 - 4\pi)}{2^7} + \frac{\gamma(\pi^2 - 2\pi)}{2^5}$ wenn u die summam seriei $\frac{1}{(4x-3)^2}$ andeutet.

Imgleichen, wenn $p = 4$, $q = -2$, $r = 0$, so wird die summa seriei

$$\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(4x-2)^2 (4x)^2} = \frac{\alpha \pi^2}{2^9} + \frac{\beta(\pi^2 - 8l2)}{2^8} + \frac{\gamma(\pi^2 - 12l2)}{3 \cdot 2^5}.$$

Wenn man setzet $\nu = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}$

*

$$A = \frac{1}{nn(n+1)} \div \frac{(2n+1)}{(n+1)^2 nn}\left(\varrho + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+1)n}$$

$$B = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} - \frac{(2n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2}\left(\varrho + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+2)(n+1)}$$

$$C = \frac{1}{(n+2)^2(n+3)} - \frac{(2n+5)}{(n+3)^2(n+2)^2}\left(\varrho + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) + \frac{\pi\pi}{6(n+3)(n+2)}$$

so werden die quantitates AC et BB desto weniger von einander differiren, je grösser der numerus n genommen wird.

Was Ew. von der summa seriei B in Dero Schreiben beyfügen, halte ich für sehr merkwürdig. Die Dissertation *de inventione termini summatorii* erinnere ich mich nicht gesehen zu haben, weiss auch nicht, ob dieselbe in Berlin oder allhier herausgekommen ist. Für die mir communicirten summas in terminis decimalibus danke ich ergebenst.

Goldbach.

LETTRE LVIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Insuffisance de la démonstration de Goldbach du théorème $4mn - m - 1 = a^2$. Résolution des fractions composées en fractions simples. Rapport fini entre deux séries infinies Le terme général d'une série étant donné, trouver le terme sommatoire de cette série Méthodes d'approximation pour trouver le nombre π.

Berlin d. 9 April 1743.

Ew. bin ich für die mir gütigst überschriebene Demonstration, dass $4mn - m - 1$ keine Quadratzahl seyn kann, gehorsamst verbunden. Die raisonnemens darin sind wegen der propositionum exclusivarum und infinitarum, so darin häufig vorkommen, so tiefsinnig, dass ich viele Mühe gehabt, ehe ich dieselben habe völlig einsehen und aus einander wickeln können, und die gewöhnlichen Regeln der Logik scheinen mir dazu kaum hinlänglich zu seyn. Alles beruhet auf dem ersten lemmate, und wenn dasselbe seine Richtigkeit hat, so ist an der Demonstration nicht das Geringste auszusetzen. Ew. berufen sich wegen dieses lemmatis auf

Dero vorige Briefe, aus welchen ich diese Demonstration gezogen:

I. Si $4nx - x - 1$ est quadratum casu $x = m$, tum erit etiam quadratum casu $x = 16mn^2 - 4n - 1$.

II. Ergo si $4nx - x - 1$ non est quadratum casu $x = 16mn^2 - 4n - 1$, tum eadem formula $4nx - x - 1$ non erit quadratum casu $x = m$.

III. Cum igitur $16mn^2 - 4n - 1$ contineatur in forma $4\nu - 1$, si demonstretur formulam $4nx - x - 1$ quadratum esse non posse casu $x = 4\nu - 1$, tum etiam certum erit formulam $4mn - m - 1$ quadratum esse non posse.

IV. Quare formula $4mn - m - 1$ quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula $4nx - x - 1$ existente x numero formae $4\nu - 1$.

V. Quoniam ergo hae formulae $4mn - m - 1$ et $4nx - x - 1$ congruunt, formula $4mn - m - 1$ quadratum esse non potest nisi sit m numerus formae $4\nu - 1$.

Wenn diese letzte Conclusion ihre Richtigkeit hat, als worin Ew. erstes lemma besteht, so ist die ganze übrige Demonstration vollkommen. Allein eben diese letzte Consequenz erwecket bei mir einen Scrupel, welchen ich nicht wohl mit Worten ausdrücken kann. Dass aber dieser mein Scrupel gegründet sey, kann ich dadurch zeigen, weilen man auf gleiche Art beweisen könnte, dass $4mn - m + 1$ kein quadratum seyn könnte, nisi sit m numerus hujus formae $4\nu + 1$, welches doch falsch ist. Diese Demonstration würde also lauten:

I. Si $4nx - x + 1$ est quadratum casu $x = m$, erit etiam quadratum casu $x = 16mn^2 + 4n + 1$, fit enim $64mn^3 - 16mn^2 + 16n^2 = 16n^2(4mn - m + 1)$.

II. Ergo si $4nx - x + 1$ non fuerit quadratum casu $x = 16mn^2 + 4n + 1$, non erit quadratum haec forma $4mn - m + 1$.

III. Cum igitur $16mn^2 + 4n + 1$ contineatur in forma $4\nu + 1$, si demonstretur formulam $4nx - x + 1$ quadratum esse non posse casu $x = 4\nu + 1$, tum simul certum foret, hanc formulam $4mn - m + 1$ prorsus quadratum esse non posse.

IV. Quare formula $4mn - m + 1$ quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula $4nx - x + 1$ casu $x = 4\nu + 1$.

V. Quoniam ergo formulae $4mn - m + 1$ et $4nx - x + 1$ congruunt, formula $4mn - m + 1$ quadratum esse non poterit nisi sit m numerus formae $4\nu + 1$.

Da nun in dieser Demonstration ein Fehler gewiss steckt, so kann auch die vorhergehende, als welche dieser in allem gleich ist, nicht admittirt werden. Vielleicht können aber Ew. von Dero erstem lemmate eine andere Demonstration geben, welche dieser Difficultät nicht unterworfen ist, deren Richtigkeit am füglichsten auf gleiche Art erkannt werden kann, wenn nehmlich Ew. aufsuchen werden, ob eben dasselbe ratiocinium nicht auf die Formul $4mn - m + 1$ sich appliciren lasse.

Was die andere Demonstration betrifft, dass $4pmn - m - n$ kein quadratum seyn könne, so kommt gleichergestalt die ganze Sach nur darauf an, dass man richtig beweise, dieselbe Formul könne keine Quadratzahl geben, nisi sit $m = 4nnq - n$. Wenn dieser Satz seine Richtigkeit hätte, so würde die folgende Demonstration nicht einmal nöthig seyn, weilen ob eandem rationem auch seyn müsste $n =$

$4mmr - m$, und folglich zugleich $m < n$ und $n < m$, welches unmöglich ist. Man könnte aber auf eben diese Art auch beweisen, dass $pmn - m - n$ nimmer ein quadratum seyn könne, denn kraft eben des vorigen ratiocinii musste $pmn - m - n$ kein Quadrat seyn können, nisi sit $m = nnq - n$; nun aber würde dieser Schluss der Wahrheit doch nicht gemäss seyn.

Ungeacht ich aber auf diese Weise in dem ratiocinio einen Fehler verspüre, so muss ich doch gestehen, dass ich denselben nicht deutlich darthun und vor Augen legen kann, welches doch sehr nöthig wäre um in andern Fällen denselben desto sicherer vermeiden zu können.

Meine Regel um eine solche Expression

$$\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(px-q)^m (rx-s)^n}$$

in ihre partes simplices zu resolviren, wenn nur $k < m+n$, verhält sich folgendergestalt. Sint partes quaesitae

$$+\frac{A}{(px-q)^m} + \frac{B}{(px-q)^{m-1}} + \frac{C}{(px-q)^{m-2}} + \frac{D}{(px-q)^{m-3}} + \cdots + \frac{M}{px-q}$$

$$+\frac{\mathfrak{A}}{(rx-s)^n} + \frac{\mathfrak{B}}{(rx-s)^{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{(rx-s)^{n-2}} + \frac{\mathfrak{D}}{(rx-s)^{n-3}} + \cdots + \frac{\mathfrak{M}}{rx-s}$$

Ponatur brevitatis gratia $\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(rx-s)^n} = Q$ et quaerantur per differentiationem continuam, posito dx constante, valores $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{ddQ}{dx^2}$, $\frac{d^3Q}{dx^3}$, $\frac{d^4Q}{dx^4}$ etc. eritque

$$\left.\begin{array}{ll} A = Q, & B = \frac{1}{1.p}\cdot\frac{dQ}{dx}, \\ C = \frac{1}{1.2.pp}\cdot\frac{ddQ}{dx^2}, & D = \frac{1}{1.2.3.p^3}\cdot\frac{d^3Q}{dx^3}, \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{posito } x = \frac{q}{p}.$$

Simili modo ponatur $\frac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \text{etc.}}{(px-q)^m} = S$, erit

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{A} = S, & \mathfrak{B} = \frac{1}{1.r}\cdot\frac{dS}{dx}, \\ \mathfrak{C} = \frac{1}{1.2.rr}\cdot\frac{ddS}{dx^2}, & \mathfrak{D} = \frac{1}{1.2.3.r^3}\cdot\frac{d^3S}{dx^3}, \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{posito } x = \frac{s}{r}.$$

Wenn also diese Formul $\frac{axx+bx+c}{(4x-3)^2(4x-1)^2}$ proponirt wird, um die partes $\frac{A}{(4x-3)^2} + \frac{B}{4x-3} + \frac{\mathfrak{A}}{(4x-1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x-1}$ zu finden, so wird erstlich

$$Q = \frac{axx+bx+c}{(4x-1)^2},\quad \frac{dQ}{dx} = \frac{2ax+b}{(4x-1)^2} - \frac{8(axx+bx+c)}{(4x-1)^3}$$

und posito $x = \frac{3}{4}$ ob $p = 4$ et $q = 3$, erit

$$A = \frac{\frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c}{4} = \frac{9}{64}a + \frac{3}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$B = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{3}{2}a + b}{4} - \frac{\frac{9}{2}a - 6b - 8c}{8}\right) = -\frac{3}{64}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c$$

Hernach ist

$$S = \frac{axx+bx+c}{(4x-3)^2},\quad \frac{dS}{dx} = \frac{2ax+b}{(4x-3)^2} - \frac{8(axx+bx+c)}{(4x-3)^3}$$

und posito $x = \frac{1}{4}$ ob $r = 4$ et $s = 1$, erit

$$\mathfrak{A} = \frac{\frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c}{4} = \frac{1}{64}a + \frac{1}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}a + b}{4} + \frac{\frac{1}{2}a + 2b + 8c}{8}\right) = \frac{3}{64}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c$$

Folglich wird die proponirte Expression $\frac{axx+bx+c}{(4x-3)^2(4x-1)^2}$ in diese partes resolvirt

$$+a\left(\frac{9}{64(4x-3)^2} - \frac{3}{64(4x-3)} + \frac{1}{64(4x-1)^2} + \frac{3}{64(4x-1)}\right)$$

$$+b\left(\frac{3}{16(4x-3)^2} - \frac{1}{8(4x-3)} + \frac{1}{16(4x-1)^2} + \frac{1}{8(4x-1)}\right)$$

$$+ c\left(\frac{1}{4(4x-3)^2} - \frac{1}{4(4x-3)} + \frac{1}{4(4x-1)^2} + \frac{1}{4(4x-1)}\right)$$

Wenn also die gegebene expressio ein terminus generalis seriei infinitae ist, ob

$$\int\frac{1}{4x-3} - \int\frac{1}{4x-1} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int\frac{1}{(4x-3)^2} + \int\frac{1}{(4x-1)^2} = \frac{\pi\pi}{8} \text{ et}$$

$$u = \int\frac{1}{(4x-3)^2}$$

wie Ew. annehmen, so wird derselben seriei summa seyn

$$= a\left(\frac{\pi\pi}{512} + \frac{1}{8}u - \frac{3\pi}{256}\right) + b\left(\frac{\pi\pi}{128} + \frac{1}{8}u - \frac{\pi}{32}\right) + c\left(\frac{\pi\pi}{32} - \frac{\pi}{16}\right)$$

$$= \frac{\pi\pi}{512}(a + 4b + 16c) + \frac{u}{8}(a + b) - \frac{\pi}{256}(3a + 8b + 16c).$$

Wenn also $a = -b$, so kann die summa seriei per solam quadraturam circuli angegeben werden.

Dass die drey Formuln A, B, C, posito

$$v = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}$$

so beschaffen sind, dass wenn n ein numerus valde magnus ist, proxime $AC = B^2$ seyn wird, deucht mir daraus klar zu seyn, weilen in diesem Fall dieselben Quantitäten sogar fast einander gleich werden.

Wenn die summa seriei $\frac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen wird, so ist auch die summa seriei $\frac{1}{(3x-1)^2}$ bekannt, und da in beiden die termini alterni besonders summirt werden können, so findt man daraus die summam seriei $\frac{1}{(6x \pm n)^2}$ denotante n numerum quemcunque integrum. Hieraus ist ferner klar, dass um die seriem $\frac{1}{(12x \pm n)^2}$ zu summiren, drey casus diversi ipsius n für bekannt angenommen werden müssen.

Ew. Postscriptum vom 12ten Februar habe ich wohl erhalten, und weilen ich auf die fürnehmsten Punkte schon

geantwortet hatte und nicht wusste, dass Denselben die Briefe franco zugestellt werden, so habe meine fernere Antwort bis jetzt verspart. Ew. darin enthaltene Reflexion über zwey series, deren jede eine summam infinitam hat, doch aber unter sich eine rationem finitam haben, ist sehr merkwürdig. Dergleichen series können nach Belieben auf folgende Art gefunden werden. Sit seriei $a + b + c + d +$ etc. $= A$ summa infinita, hujus autem seriei $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= B$ summa finita, erit

$$\begin{aligned} AB = a\alpha &+ b(\alpha+\beta) + c(\alpha+\beta+\gamma) + d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} \\ &+ \beta a \quad + \gamma(a+b) \quad + \delta(a+b+c) + \text{etc.} \end{aligned}$$

hier ist aber die summa seriei inferioris finita und folglich evanescirt dieselbe prae superiori, dahero ist $\frac{AB}{A} = B$, oder

$$\frac{a\alpha + b(\alpha+\beta) + c(\alpha+\beta+\gamma) + d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.}}{a + b + c + d + \text{etc.}} =$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

ferner ist auch $b + c + d + e +$ etc. $= A$ und also

$$AB = b\alpha + c(\alpha+\beta) + d(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.}$$

welche zur obigen gethan gibt

$$2AB = (a+b)\alpha + (b+c)(\alpha+\beta) + (c+d)(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} = C$$

und also $\frac{C}{2A} = B$. Wenn $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. und $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} +$ etc. so kommen Ew. series heraus.

Meine Dissertation de inventione termini summatorii ex dato termino generali seriei ist in dem 8ten tomo Commentariorum gedruckt. Dieselbe bestehet kürzlich darin, dass wenn man setzt: $\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X} = S$ oder wenn S den terminum summatorium einer series andeutet, deren terminus generalis ist $= X$, das ist eine quantitas ex indice x utcunque composita, so wird seyn

$$S = \int X dx + \frac{X}{1.2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dX}{1.2.3.dx} - \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3 X}{1.2..5 dx^3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{d^5 X}{1.2...7.dx^5}$$
$$- \frac{3}{10} \cdot \frac{d^7 X}{1.2...9\, dx^7} + \frac{5}{6} \cdot \frac{d^9 X}{1.2...11.dx^9}$$
$$- \frac{691}{210} \cdot \frac{d^{11} X}{1.2...13 dx^{11}} + \text{etc.}$$

da ob integrationem $\int X dx$ eine solche constans muss addirt oder subtrahirt werden, dass die ganze expressio wird $= 0$, wenn $x = 0$.

Wenn also zum Exempel der terminus summatorius von dieser serie $1 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + \text{etc.} \ldots + x^8$ gesucht werden soll, so ist $X = x^8$, $\int X dx = \frac{1}{9} x^9$, $\frac{dX}{dx} = 8x^7$, $\frac{ddX}{dx^2} = 7.8x^6$, $\frac{d^3 X}{dx^3} = 6.7.8x^5$, $\frac{d^4 X}{dx^4} = 5.6.7\, 8x^4$, $\frac{d^5 X}{dx^5} = 4.5.6.7.8x^3$, $\frac{d^7 X}{dx^7} = 2.3.4.5.6.7.8x$, $\frac{d^9 X}{dx^9} = 0$ und die folgenden differentialia alle evanesciren. Dahero wird

$$S = \frac{1}{9} x^9 + \frac{1}{2} x^8 + \frac{2}{3} x^7 - \frac{7}{15} x^5 + \frac{2}{9} x^3 - \frac{1}{30} x.$$

So oft also X eine functio integra von x ist, weilen bey einer jeglichen Differentiation die dimensiones abnehmen, so muss immer ein terminus summatorius in forma finita gefunden werden. Wenn aber der terminus generalis X eine Fraction ist, so gehen auch die differentiationes in infinitum fort und folglich wird der terminus summatorius per seriem infinitam exprimirt. In diesem Fall kann auch die constans adjicienda nicht anders gefunden werden als dass man datum terminorum numerum actu addire und die constantem so annehme, dass in diesem Fall die bekannte Summa herauskomme. Als es sey $S = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.} \cdots + \frac{1}{x^3}$, so ist $X = \frac{1}{x^3}$ und $\int X dx = \text{Constant.} - \frac{1}{2xx}$; ferner

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{3}{x^4}, \quad \frac{ddX}{dx^2} = \frac{3.4}{x^5}, \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = -\frac{3\ 4\ 5}{x^6}, \quad \frac{d^5 X}{dx^5} = -\frac{3.4.5.6.7}{x^8}$$

Dahero wird $S = \text{Const.}$

$$-\frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2x^{10}} - \text{etc.}$$

Um die constantem zu finden, so addire man actu 10 terminos. Gesetzt, die gefundene Summe sey N, so muss, posito $x = 10$, $S = N$ werden, also wird

$$\text{Const.} = N + \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{2.10^3} + \frac{1}{2.2.10^4} - \frac{1}{2\ 6.10^6} + \frac{1}{2.6.10^8} - \text{etc.}$$

woraus diese constans verae proxima leicht gefunden wird.

Hiernach kann man leicht die summam seriei ad datum quemvis terminum finden, und wenn man die summam in infinitum verlangt, so setze man $x = \infty$, und da wird $S = \text{Const.}$, also die constans inventa ist die summa seriei in infinitum continuatae.

Wenn man diese seriem

$$\frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \cdots + \frac{1}{aa+aa}$$

actu summirt, so ist die Summ deswegen merkwürdig, weil durch dieselbe die quadratura circuli so nahe gefunden werden kann. Es sey $s = \frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \cdots + \frac{1}{aa+aa}$, so wird proxime seyn $\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$. Als wenn man setzt $a = 1$, fit $s = 1{,}5$ et $\pi = 3{,}166666\ldots$ zu gross. Si $a = 2$ fit $s = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 0{,}575$; $4as = 4{,}6$ und also $\pi = 3{,}14166666\ldots$ zu gross.

Sit $a = 3$ fit $s = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} = 0{,}343589743589743589 7$

$4as = 12s = 4{,}1230769230769230$

subtr. $\frac{3}{a} = 1$

add. $\frac{1}{6aa} = 0{,}0185185185185185$

fiet $\pi = 3{,}1415954415954415$. Diese Expression gibt also die Peripherie immer zu gross. Ich habe demnach den excessum gesucht, und gefunden, dass sey

$$\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3aa} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^2.3.7a^6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^4\,5.11a^{10}}$$
$$- \frac{35}{2}\cdot\frac{1}{2^6.7.15a^{14}} + \frac{43867}{42}\cdot\frac{1}{2^8.9.19a^{18}}$$
$$- \frac{854513}{6}\cdot\frac{1}{2^{10}.11.23a^{22}} + \frac{76977927}{2}\cdot\frac{1}{2^{12}.13.27a^{26}} - \text{etc.}$$
$$- \frac{4\pi}{e^{2\pi a} - 1},$$

allwo dieser letzte terminus ungemein klein wird, wenn a mittelmässig gross angenommen wird; denn es ist schon $e^{6\pi} = 153552990$, weilen $e^{\pi} = 23{,}14069$. — Ew. waren einmal auf Operationen bedacht, wie man Zahlen finden könnte, so ohne einige legem fortgingen, um zu versuchen, ob man nicht etwa auf eine solche Art die Zahl $\pi = 3{,}14159$ etc. herausbringen könnte. Solche irreguläre Zahlen können nun gefunden werden durch die ordentliche Division, wenn man bey jeder Operation den divisorem um 1 vermehrt; als aus diesem Exempel zu sehen

	1 2 2 4 5 2 6 4 4 10 1 10 9 6 15 6 9 18 9
Dividend	1,0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Divisores	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
Quotus	0,4 6 4 7 8 2 7 4 3 9 0 7 6 3 9 3 4 9 4 etc.

Wenn ich nehmlich so viel mal nehmen könnte, dass nichts übrig bliebe, so nehme ich einmal weniger, damit diese

Division in infinitum fortgehe. Wenn man nun auf eine solche Art die quadraturam circuli finden könnte, so hielte ich dieselbe für so gut als würklich gefunden.

Auf die vorher beschriebene Art durch die series $\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$ etc., wenn für a eine etwas grosse Zahl, als 10, genommen wird, kann der valor ipsius π auf viel Figuren ziemlich leicht gefunden werden, allein da die coëfficientes sehr irregular fortgehen, so halte ich keine Methode bequemer um den valorem ipsius π zu finden, als diejenige, welche schon längstens einmal gefunden. Ich weiss nicht, ob Ew. derselben sich noch erinnern; sie bestehet aus zwey seriebus, deren jede stark convergirt und auch leicht per approximationes auf sehr viel Figuren summirt werden kann. Es sey nehmlich

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \frac{1}{13.2^7} - \text{etc.}$$
$$B = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \frac{1}{13.2^{13}} - \text{etc.}$$

so wird seyn $\pi = 4A + 2B$ oder es ist

$$\pi = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5.2} - \frac{1}{6.2} - \frac{1}{7.2^2} + \frac{1}{9.2^3} + \frac{1}{10.2^3} + \frac{1}{11.2^4} - \frac{1}{13.2^5}$$
$$- \frac{1}{14.2^5} - \frac{1}{15.2^6} + \text{etc.}$$

Da in diesen seriebus nur die potestates binarii vorkommen, so kann ich auch solche geben, worin nur die potestates von 2 und 3 enthalten sind. Also wenn man setzt

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \frac{1}{11.2^{11}} + \text{etc.}$$

und

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{1}{11.3^{11}} + \text{etc.}$$

so wird seyn $\pi = 4C + 4D$. Diese series scheinen mir nun weit bequemer zu seyn, als diejenige, welcher sich Sharp, Machin und Lagni bedienet, als welche ihre grossen Zahlen durch Hülfe dieser seriei

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9.3^4} - \text{etc.}$$

gefunden, welche nicht so stark convergirt, als eine von den obigen, und noch dazu dieser Schwierigkeit unterworfen ist, dass man erstlich $\sqrt{3}$ auf so viel Figuren als man haben will suchen, und dann diese beschwerliche Zahl beständig dividiren muss. Deswegen kann sich in keinem termino eine revolutio periodica figurarum finden, wodurch man die folgenden Figuren aus den vorhergehenden finden könnte. Dahingegen bey meinen seriebus dieser Vortheil in einem jeden termino stattfindet, so dass ich wohl 10 terminos per fractiones decimales von meinen seriebus evolviren wollte, ehe Lagni einen einzigen von seiner evolvirt hat.

Euler.

LETTRE LIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Continuation sur les mêmes sujets.

St. Petersburg d. 4. Mai 1746.

Ich sehe in der That, dass das letztlich angeführte lemma 1 nicht alsofort aus dem, was ich vorher von der aequatione $4mn - m - 1 = a^2$ geschrieben hatte, erhellet; dahero bitte ich nachfolgendes raisonnement in considération zu ziehen:

Si in aequatione $E \ldots 4mn - m - 1 = a^2$ ponatur $m = 4\nu - 1$, $\nu = 4n^2M - n$ et $a^2 = 16n^2A^2$, transmutabitur aequatio E in $F \ldots 4nM - M - 1 = A^2$ quae, cum non differat ab aequatione E, nisi sola specie litterarum M, A et m, a, et pro unaquaque harum litterarum poni possint omnes numeri integri affirmativi, necesse est aequationem E et F unam eandemque esse. Si vero in E solus valor (ex hypothesi impossibilis, $m = 4\nu - 1$ comprehendit aequationem

F in omni sua amplitudine, quae aequatio F revera aequivalet aequationi E, sequitur, per casum $m = 4\nu - 1$, si impossibilis est in E, non magis excludi omnes casus possibiles aequationis F, quam omnes casus possibiles ipsius aequationis E, cum nullus casus possibilis reperiatur in E, quin sit assignabilis in F.

Dieses wird sich hoffentlich auch in dem von Ew vorgeschlagenen parallelismo mit der Formul $4nx - x + 1$, deren casus quadrabilitatis ich nicht untersuchet habe, souteniren. Wo nicht, so wird es mir lieb seyn die Sache ins künftige besser einzusehen. Ich danke indessen dienstl. für die in Ew. Schreiben enthaltenen schönen theoremata, wovon ich vielleicht künftig etwas zu melden Gelegenheit haben werde.

Goldbach.

P. S. Haben Ew. eine Methode den valorem in dem casu zu determiniren, da $f = 1$ und π in der gewöhnlichen Bedeutung genommen wird in hac formula?

$$\frac{\pi^2}{6f(f-1)} - \frac{(2f-1)}{f^2(f-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{f(f-1)^2}$$

Ich halte dafür, dass der valor quaesitus alsdann seyn werde

$$-\frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

Wenn ich mich recht erinnere, so haben Sie mir ehemals eine Formul communiciret, welche die summas serierum, quarum formula est $\frac{1}{xx + fx}$, generaliter gibt, posito pro f numero quocunque etiam fracto; die Formul selbst aber ist mir vorjetzo nicht bekannt.

LETTRE LX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Continuation sur les mêmes sujets.

Berlin d. 21. Mai 1745.

Aus der Verwandelung dieser Formul $4mn - m - 1 = aa$ in diese ähnliche $4Mn - M - 1 = AA$ facta substitutione $m = 4\nu - 1$, $\nu = 4nnM - n$ et $aa = 16n^2A^2$ kann ich nicht sehen, dass mehr folget als, si formula $4mn - m - 1$ quadrata nequeat esse casu $m = 4\nu - 1$, omnino quadratum esse non poterit; oder, wenn man demonstriren könnte, dass $4mn - m - 1$ nullo casu $m = 4\nu - 1$ ein Quadrat wäre, so wäre zugleich richtig erwiesen, dass eben dieselbe Formul nullo prorsus casu ein Quadrat seyn könnte. Hingegen kann diese Conclusion nicht zugegeben werden: omnes casus, quibus $4mn - m - 1$ sit quadratum, habere $m = 4\nu - 1$. Aber diese Consequenz hat wiederum ihre

Richtigkeit si cognitus esset casus, quo $4mn - m - 1 = \square$, neque tamen fuerit m numerus formae $4v - 1$, ex eo certe alius casus derivari posset, quo m esset numerus formae $4v - 1$. Um aber die Sach deutlicher zu machen, so will ich diese ähnliche Formul $9mn - m - 1 = aa$ betrachten, welche wenn man setzt $m = 9v - 1$, $v = 9nnM - n$ et $a = 9nA$ in diese $9Mn - M - 1 = AA$ verwandelt wird. Wenn man nun schliessen wollte diese Formul $9mn-m-1$ könne kein quadratum seyn, nisi m sit numerus formae $9v - 1$, so würde die Unrichtigkeit dieses Schlusses sogleich erhellen, denn $9mn - m - 1$ wird ein quadratum in folgenden casibus:

$n = 2,\ m = 1$	$n = 3,\ m = 1$	$n = 6,\ m = 10$
$n = 2,\ m = 10$	$n = 3,\ m = 17$	$n = 6,\ m = 17$
$n = 2,\ m = 26$	$n = 3,\ m = 37$	$n = 6,\ m = 109$
$n = 2,\ m = 53$	$n = 3,\ m = 85$	$n = 6,\ m = 130$
etc.	etc.	etc.

woraus erhellet, dass $9mn - m - 1$ infinitis modis ein quadratum seyn könne, ohne dass m ein numerus hujus formae $9v - 1$ ist, ungeacht eben dasjenige raisonnement hier angebracht werden kann, welches bey der Formul $4mn-m-1$ gemacht worden.

Dieses Jahr hat der Hr. Prof. Daniel Bernoulli das ganze praemium erhalten und meiner pièce ist das Accessit, jedoch ohne meinen Nahmen zuerkannt worden.

Nunmehr sind die opera Joh. Bernoullii omnia in vier Quart-Bänden fertig worden. Der Verleger, M. Bousquet, hat dieselben selbst biehergebracht und dem Könige ein magnifiq eingebundenes Exemplar praesentirt. Ich habe auch eins von dem Hn. Bernoulli zum Praesent erhalten. Die

3 ersten tomi enthalten alle seine Pièces, welche bisher hin und wieder gedruckt worden, der 4te aber die anecdota. Das Exemplar wird nicht anders als für 20 Rthlr. in Francfurt verkauft. M. Bousquet hat einen Contract mit mir geschlossen, kraft welches er alle meine Schriften, ausgenommen diejenigen, welche ich nach St. Petersburg zu schicken schuldig bin, drucken wird, und wird den Anfang mit dem tractatu de Isoperimetris machen. Er hätte gern mit der Scientia navali angefangen; ich muss aber erst vernehmen, ob die Akademie noch gesinnt seyn wird, dasselbe zu drucken.

Ew. problema de inveniendo valore hujus expressionis

$$P = \frac{\pi^2}{6n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{nn(n-1)^2}$$

casu quo $n = 1$ ist gewiss mit eines von den schwersten in dieser Art. Ich habe eben denjenigen valorem herausgebracht, welchen Ew. mir entdecket. Um denselben zu finden, habe ich gesetzet $n = 1 + \alpha$, denotante α numerum evanescentem. Sit enim hoc casu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = Q$ atque formula proposita abibit in hanc

$$P = \frac{\pi\pi}{6\alpha(1+\alpha)} + \frac{1}{\alpha^2(1+\alpha)} - \frac{(1+2\alpha)Q}{\alpha^2(1+\alpha)^2} =$$

$$\frac{\pi\pi}{6}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\left(1 + 2\alpha\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 3\right) =$$

$$\frac{\pi\pi}{6\alpha} - \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right).$$

Die ganze Sach kommt also auf den valorem ipsius Q an, posito $n = 1 + \alpha$. Diesen finde ich also: generaliter ist $Q = \int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$ si post integrationem ponatur $x = 1$. Denn es ist $\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1}$ folglich