LETTRE XXXVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Sur les paradoxes de Luneschlos. Controverse entre Segner et les partisans de Wolf. Valeur réelle d'une expression imaginaire.

Berlin d. 9 December 1741.

— — — Für die mir communicirten paradoxa des Luneschlos bin gehorsamst verbunden. Es zeigen einige davon, als von dem Ton der Glocken und Saiten, eine richtige Einsicht in die Natur. Das von den Glocken stehet aber schon in Stifelii Anmerkungen über die Coss Christoff Rudolfs. Dasjenige, welches Ew. zuerst von der annihilirten Materie in einem Geschirr geschrieben, scheinet auf diesem ratiocinio zu beruhen: Ist keine Materie zwischen den Seiten des Gefässes, so ist nichts dazwischen; ist aber nichts dazwischen, so sind die Seiten aneinander, ungeacht das Gefäss seine vorige Figur behält. Ich halte aber dieses ratiocinium für ein blosses Sophisma und bei weitem nicht hinreichend, die impossibilitatem vacui in mundo zu erweisen.

Der Hr. Geh. Rath Wolf, oder vielmehr seine Anhänger haben neulich einen harten Streit mit dem Hn. Segner, Prof. math. in Göttingen, bekommen, indem dieser einige grobe Fehler in des Hn. Wolfs Elementis Matheseos vorgab gefunden zu haben. Es sind beiderseits schon verschiedene Schriften gewechselt worden. Der Hr. Segner aber hat Recht, und von Seiten des Hn. Wolfs sind die Defensionen so schlecht beschaffen, dass daher der Wolfianischen Philosophie wenig Ehre zuwächst. Man hätte besser gethan die Fehler zu erkennen, weil dieselben ganz offenbar sind, und dieselben in einer neuen Ausgabe, woran wirklich gearbeitet wird, zu verbessern.

Ich habe letztens auch ein merkwürdiges Paradoxon gefunden, nehmlich, dass der Werth von dieser Expression $\frac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sey $\frac{10}{13}$, und dieser Bruch differirt nur in partibus millionesimis von der Wahrheit. Der wahre Werth aber dieser Expression ist der Cosinus dieses arcus 0,6931471805599, oder des arcus von 39^0, $42'$, $51''$, $52'''$, 9^{IV} in einem Circul, dessen radius $= 1$.

Ich habe auch noch verschiedene wichtige Decouverten gemacht über die Integration solcher Formuln $\frac{P\,dx}{Q}$, allwo P und Q functiones quaecunque rationales von x sind. Wovon zu einer andern Zeit die Ehre haben werde Ew. ausführlicher zu schreiben.

Euler.

LETTRE XXXVIII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente.

St. Petersburg d. 15 Febr. n. st. 1742.

— — — Die Demonstration meines theorematis, welche Ew. in Ihrem vorigen Schreiben gegeben, ist eben dieselbe, die ich auch hatte.

Das theorema dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könne, gefället mir sehr, und ob ich es gleich nicht demonstriren kann, so habe doch diese consequentiam daraus gezogen, dass nicht allein, wie Ew. schon angemerket, auch $4mn - m - n$ kein numerus quadratus sey, sondern generatim die Expression $4mn - m - n^a$, allwo a ein numerus integer positivus quicunque ist, niemals ein quadratum geben könne.

Bei der Observation, so Ew. mir communiciret, dass $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sey $\frac{10}{13}$, ist mir eingefallen, dass wenn man machen wollte, dass

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

würde, alsdann p kleiner als 3 und grösser als 2 seyn müsse. Ich gestehe, dass diese limites grosso modo angegeben sind, habe aber nicht die curiosité sie näher zu determiniren.

In dem 20[ten] Briefe part. 1. von Kolben Beschreibung Capitis bonae spei sind einige remarques über die dortige Ebbe und Fluth, welche vielleicht meritiren von Ew. gelesen zu werden. Das Buch wird ohne Zweifel auf der Königl. Bibliothèque seyn . . . . .

Dass Ew. anjetzo Ihre Zeit nach Ihrem eignen Belieben anwenden können, gereichet mir zum grossen Vergnügen, und ich möchte für das Aufnehmen der Wissenschaften wünschen, dass Sie jederzeit in solcher Situation verbleiben könnten . . . . .

Goldbach.

LETTRE XXXIX.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorèmes de la théorie des nombres

Berlin d. 6 März 1742.

— — Dass $4mn - m - 1$ oder $4mn - m - n$ niemals ein quadratum seyn könne, konnte ich bis anjetzo auch nicht rigorose demonstriren, sondern ich hatte solches aus einem theoremate Fermatiano, worin behauptet wird, dass eine summa duorum quadratorum $aa + bb$ niemals per numerum formae $4n - 1$ divisibilis sey, hergeleitet. Denn hat dieses theorema seine Richtigkeit, so ist $aa + 1 \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} (4n-1)m$, da ich Ew. signum $\mathrel{\sqsupset\!\sqsubset}$ um eine aequationem impossibilem anzuzeigen, gebrauche. Dahero ist $aa \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} 4mn - m - 1$. Ferner kann auch $\frac{aa+1}{4n-1}$ unmöglich ein numerus integer seyn, oder es ist $\frac{aa+1}{4n-1} \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} i$, folglich ist auch $\frac{aa+1}{4n-1} + 1$ oder

$\frac{aa+4n}{4n-1}$ oder $\frac{bb+n}{4n-1} \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} i$. Gleichfalls kann $\frac{bb+n}{4n-1} + n$ oder $\frac{bb+4nn}{4n-1}$ oder $\frac{cc+nn}{4n-1}$ kein numerus integer seyn. Und wenn man auf solche Art fortgehet, so folget, dass $\frac{aa+n^a}{4n-1} \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} m$ und also $aa \mathrel{\sqsupset\!\sqsubset} 4mn - m - n^a$; welches die Consequenz ist, so Ew. aus diesem theoremate gezogen haben. Die Richtigkeit davon beruhet also auf der Wahrheit dieses theorematis, dass eine summa duorum quadratorum $aa + bb$ unmöglich durch $4n - 1$ getheilt werden könne, wenn nicht aa und bb ein jedes für sich durch $4n - 1$ divisibile ist. Ich habe aber erst jetzo hievon nachfolgende Demonstration gefunden:

Prop. 1. Haec forma $(a + b)^p - a^p - b^p$ semper est divisibilis per p si fuerit p numerus primus.

Dem. Evolvatur potestas $(a + b)^p$ eritque
$$(a+b)^p - a^p - b^p = \frac{p}{1} a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2 + \ldots\ldots$$
$+ \frac{p(p-1)}{1.2} a^2 b^{p-2} + \frac{p}{1} a b^{p-1}$ cujus expressionis singuli termini sunt numeri integri, singuli ergo erunt divisibiles per p siquidem p sit numerus primus: nam si p foret numerus compositus, fieri possit, ut in quodam termino factor quispiam ipsius p per factorem denominatoris tolleretur, illeque terminus, ac proinde tota expressio cessaret per p divisibilis esse. Quocirca si p est numerus primus, haec expressio $(a + b)^p - a^p - b^p$ semper erit divisibilis per p. $Q.E.D.$

Coroll. 1. Positis ergo $a = b = 1$ erit $2^p - 2$ divisibile per numerum primum p, ideoque nisi p sit $= 2$ erit $2^{p-1} - 1$ per p divisibile.

Coroll. 2. Sit $a = 2$, $b = 1$, erit $3^p - 2^p - 1$ divisibile per p. Cum autem $2^p - 2$ sit quoque divisibile per p, erit quoque istarum formularum summa $3^p - 3$ divisibilis per p, ideoque nisi sit $p = 3$, erit $3^{p-1} - 1$ per p divisibile.

Prop. 2. Si $a^p - a$ fuerit divisibile per p erit quoque $(a+1)^p - a - 1$ per p divisibile.

Dem. Si in propositione 1 ponatur $b = 1$, erit $(a+1)^p - a^p - 1$ per p divisibile. Cum autem per hypothesin sit $a^p - a$ per p divisibile, erit quoque summa istarum formularum $(a+1)^p - a - 1$ per p divisibilis $Q.E.D.$

Coroll. 1. Cum igitur $1^p - 1$ divisibile sit per p, erit quoque $2^p - 2$ divisibile per p, hincque porro progrediendo per p divisibiles erunt istae formulae $3^p - 3$, $4^p - 4$, $5^p - 5$, etc.

Coroll. 2. Generaliter ergo per numerum primum p divisibilis erit ista formula $a^p - a$ quicunque numerus integer loco a ponatur. Nisi ergo p sit divisor ipsius a, erit quoque $a^{p-1} - 1$ per p divisibile.

Coroll. 3. Quoniam simili modo $b^{p-1} - 1$ per numerum primum p est divisibile, nisi b sit multiplum ipsius p, sequitur fore $a^{p-1} - b^{p-1}$ per p divisibile.

Theorema. Summa duorum quadratorum $aa + bb$ non est divisibilis per numerum primum $4n - 1$, nisi utrumque quadratum seorsim per eundem numerum primum sit divisibile.

Demonstratio. Quoniam per hyp. neque a neque b divisibile est per $4n - 1$, sequitur hanc formulam $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ fore per $4n - 1$ divisibilem, unde per $4n - 1$ non erit divisibilis haec forma $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ neque propterea ullus ejus factor. At cum $4n - 2$ sit numerus impariter par, formulae $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ factor est $aa + bb$: quocirca $aa + bb$ per numerum primum $4n - 1$ dividi omnino nequit. $Q.E.D.$

Coroll. 1. Quoniam si $4n - 1$ non est numerus primus, divisorem habet necessario numerum primum hujus formae $4n - 1$, sequitur summam duorum quadratorum $aa + bb$ per nullum numerum hujus formae $4n - 1$ sive primum, sive non primum dividi posse.

Coroll. 2. Quodsi ergo summa duorum quadratorum $aa + bb$ habeat divisorem, is erit necessario numerus formae hujus $4n + 1$.

Coroll. 3. Si ergo summa duorum quadratorum $aa + bb$ per alium numerum dividi nequit, nisi qui ipse sit duorum quadratorum summa (quod demonstrari posse confido) sequitur omnem numerum primum $4n + 1$ in duo quadrata esse resolubilem.

Dass Ew. die curiosité gehabt zu untersuchen, wann diese Formul $2^{+p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ nihilo aequalis werden könnte, hat mir Anlass gegeben anzumerken, dass solches infinitis modis geschehen könne. Der erste valor pro p ist, wie Ew. observirt, zwischen 2 und 3, nehmlich $p = 2{,}26618021$, der wahre valor aber ist $p = \frac{\pi}{2l2}$, da ist $\pi = 3{,}14159265$ und $l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = 0{,}6931471805$. Alle folgenden valores ipsius p entspringen aus diesem, indem man diesen mit 3, 5, 7, 9, etc. multiplicirt. — — —

Euler.

LETTRE XL.

═

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. E est chargé de donner des leçons de mathématiques aux princes de Würtemberg. Comète de 1742

Berlin d. 13 März 1742.

— — Ich habe die Ehre gehabt in meinem vorigen Schreiben Ew. zu melden, dass die Durchl. Herzogin von Würtenberg mir die Information in der Mathematic und Physic über Dero Prinzen aufgetragen, womit ich schon seit einigen Wochen continuire. Weilen ich aber allhier noch keine Vorgesetzte habe, und diese Occupation ohne Erlaubniss nicht wohl über mich nehmen konnte, so habe deswegen directe an Ihro Königl. Majestät nach der Armée geschrieben und vor etlichen Tagen darauf die Allergnädigste Permission durch ein Handschreiben bekommen. Von aussen war die Adresse: *A mon Professeur Euler* und der Inhalt war folgender:

Aiant vû par Votre lettre du 20 du mois passé que la Duchesse de Würtenberg vous demande des leçons mathématiques pour les princes de Sa maison, Je vous en accorde la permission avec bien du plaisir, étant au reste votre bien affectionné Roi Federic.

Znaim ce 1 mars 1742.

Uebrigens kann ich die sonderbare Capacität des Erb-Prinzen und den durchdringenden Verstand nicht genugsam bewundern. Meine Lection ist täglich von 10 bis 11 Uhr, da dann die Mess angehet. — — —

Ew. habe das letzte Mal meine Demonstration des theorematis, dass $4mn-m-n$ niemals ein quadratum seyn könne, zu überschreiben die Ehre gehabt. Aus derselben folgen noch viel andere artige Speculationen in dieser Materie, und ich bin versichert, dass Ew. noch viel herrliche Consequenzen daraus herleiten werden. Ich habe anjetzo auch eine ganz andere Methode gefunden die summas serierum potestatum reciprocarum zu finden, welche sich nicht wie die erstere auf die radices infinitas einer aequationis infinitae gründet, sondern bloss allein aus den regulis differentiationum und integrationum fleusst, wovon das nächste Mal ausführlicher zu schreiben willens bin.

Euler.

P. S. Seit acht Tagen hat man allhier einen Cometen wahrgenommen, erst vorgestern aber hat man Gelegenheit gefunden denselben auf dem Observatorio zu observiren. Er erschien d. 11ten um Mitternacht in ala boreali Cygni, so dass longitudo war $\approx 12^\circ\ 30'$ und latitudo borealis 71°. Sechs Stunden hernach schien er beynahe um 2° in consequentia fortgerückt seyn, woraus ich schliesse, dass dieser Comet nicht weit von seinem Perihelio seyn müsse; ob er aber erst dahin gehe, oder schon daher komme, kann aus dieser einigen Observation nicht geschlossen werden. Die letztvergangene Nacht war es trüb, dass man nicht observiren konnte. Im übrigen schien der nucleus wie eine stella 4^{tae} magnitudinis, hatte eine comam und caudam ungefähr 3^0 lang. Was hierüber in Petersburg entweder observiret worden oder noch wird observiret werden, solches ersuche Ew. gehorsamst mir zu melden. Sobald man hier wird mehrere und accuratere Observationen machen können, werde ich solche gleich der Akademie zu überschreiben die Ehre haben.

LETTRE XLI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Recherches sur les nombres et les quantités à exposans imaginaires.

St. Petersburg d. 12 April 1742.

Meine Demonstration, dass wenn $4mn - m - n^a$ kein numerus quadratus ist, auch $4mn - m - n^{a+1} = a^2$, fliesset alsofort aus der einigen Supposition $m = 4p - n^a$, denn hiedurch wird $4n(4p - n^a) - 4p = 4b^2$, quae aequatio divisa per 4, dat $4pn - p - n^{a+1} = b^2$, so dass in der Aequation $x^a = 4px - p - a^2$, wo a ein numerus integer quicunque ist, x keinen valorem positivum in integris haben kann. Es folget auch ferner, dass obgleich $p^2 - p - e^2$ infinitis modis ein quadratum in integris ist, dennoch

$$\frac{p \pm \sqrt{(p^2 - p - e^2)}}{2}$$

niemals ein numerus integer seyn kann; item dass die zuerst erwähnte Formul $4mn - m - n^a$ keinen numerum triangularem gebe, oder dass $x^a = 4px - p - \frac{(b^2 - b)}{2}$ niemals eine radicem affirmativam in integris haben kann.

Gegen die mir communicirte Demonstration, wofür ich Ew. sehr verbunden bin, finde ich nichts zu erinnern, vielleicht könnte man aber generaliter sagen, dass $(a + b)^p - a^p - b^p$ allezeit per aliquem divisorem ipsius p divisibile ist, woraus denn als ein casus particularis folget, dass wenn p ein numerus primus ist, die gedachte Formul per ipsum numerum p divisibilis seyn müsse *).

Bey Gelegenheit dessen, was Ew. von der Formul

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

schreiben, habe ich observiret, dass wenn n variabilis gesetzt wird, alsdann $2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}} = 2$ werde, so oft n ein numerus pariter par ist, und dass sie hingegen $= -2$ werde, so oft n ein numerus pariter impar ist, und wenn n ein numerus integer, q aber ein numerus quicunque rationalis aut irrationalis ist, so wird allezeit

$2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}$ **).

Es ist meines Erachtens auch remarquable, dass wenn man p durch diese Aequation determiniret $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, alsdann $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$ wird

$$\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x+1} - (-1+\sqrt{5})^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right] - \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x-1} - (-1+\sqrt{5})^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right]$$

so oft x ein numerus integer ist.

Nachdem ich diese Observation wieder durchgelesen, finde ich dieselbe von keiner Wichtigkeit; man darf nur setzen $a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist $a^x + a^{-x}$ der terminus generalis.

Goldbach.

*) Emendandum vid. infra. G. **) V. la lettre suivante.

LETTRE XLII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

Berlin d. 8 Mai 1742.

— — Die Corollaria, welche Ew. aus meinem theoremate, dass $4mn - m - n$ kein quadratum seyn könne, hergeleitet, sind sehr merkwürdig und übertreffen das theorema selbst weit an Wichtigkeit. Denn dass $4mn - m - n$ auch kein numerus trigonalis seyn könnte, hatte ich nicht wahrgenommen; anjetzo habe aus dieser Anleitung auch befunden, dass eben diese Formul $4mn - m - n$ auch kein numerus heptagonalis seyn könne. Ueberhaupt habe gefunden, dass alle Zahlen welche nicht $= 4mn - m - n$ seyn können, in dieser Formul $xx + yy + y$ enthalten sind. Daher diese Expression $4mn - m - n + xx + yy + y$ alle möglichen Zahlen geben muss, welches theorema einigermaassen ähnlich ist dem Fermatiano, dass $pp+qq+rr+ss$ alle mögliche Zahlen hervorbringe. Ich habe noch viel mehr dergleichen theoremata, als $3aa+3bb+7cc$ kann niemals ein quadratum seyn; item $2aa+6bb+21cc$ quadratum esse nequit und dergleichen. Ich habe aber noch keine dergleichen formulam finden können, in welcher 4 litterae a se invicem non pendentes enthalten wären.

Dass im Uebrigen meine jüngst überschickte Demonstration bei Ew. Beifall gefunden, erfreuet mich sehr. Dass aber diese Formul $(a+b)^p - a^p - b^p$ auch durch p oder einen divisorem des p, praeter unitatem, wenn p kein numerus primus ist, divisibilis seyn sollte, kann durch meine Demonstration nicht nur nicht erwiesen werden, sondern es trifft auch in vielen Fällen nicht zu. Als wenn $a=1$ et $b=1$, et $p=35$, so lässt sich $2^{35}-2$ weder durch 5 noch durch 7 theilen.

Wenn generaliter $a^{p\sqrt{-1}}+a^{-p\sqrt{-1}}=b$, so ist
$$a^{xp\sqrt{-1}}+a^{-xp\sqrt{-1}}=\left(\frac{b+\sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x+\left(\frac{b-\sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x,$$
und folglich, wenn $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=3$, so wird $2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}}=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2x}$. Somit kommen Ew. Observationen mit meinem General-theoremate, dass $a^{+p\sqrt{-1}}+a^{-p\sqrt{-1}}=2\cos.\mathrm{Arc}.pla$ meistentheils überein, nur dass $2^{(4n+q)p\sqrt{-1}}+2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}}$ nicht gleich ist $2^{qp\sqrt{-1}}+2^{-qp\sqrt{-1}}$, wenn nicht entweder $(2n+q)pl2$ oder $2npl2$ gleich ist $m\pi$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam.

Euler.

LETTRE XLIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Continuation sur les mêmes sujets. Deux théorèmes d'analyse.

Moscau d. 7 Juni n. st 1742.

— — — Ohngeachtet ich mich in meinem vorigen Briefe mit der particula vielleicht précautionniret, so hätte doch nicht geglaubet, dass die Formul $(a+b)^p-a^p-b^p$ sich nicht allezeit durch einen von den divisoribus numeri p sollte dividiren lassen, wenn solches nicht durch das von Ew. angeführte exemple deutlich bestätiget würde.

So viel ich mich erinnere, hatte ich mir in meinem letzten Briefe die Formul $2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}}$, posito $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$, als applicatas einer curvae serpentiformis, deren abscissae x sind, vorgestellet, und welche den axem so oft durchschneidet, als die Formul $=0$ wird, so dass, wenn die formula ipsa $= 2$ ist, die applicata maxima unten oder oben herauskommt, folglich unzählige andere applicatae unter sich gleich seyn müssen; nichts desto weniger ist in meiner damaligen Expression ein Fehler eingeschlichen, den Ew. mit Recht angemerket haben, und leicht verbessert werden kann, indem es heissen sollen, dass wenn q ein numerus quicunque und $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ gesetzet wird, alsdann posito pro n integro quocunque, seyn werde

$$2^{(8n-4-q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(8n-4-q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}.$$

Ew. haben gefunden, dass alle Zahlen, so nicht $4mn-m-n$ seyn können, in dieser Formul begriffen sind v^2+v+u^2, und ich finde, dass alle $4mn-m-n$ zu dieser Formul y^2+y-x^2 gebracht werden können, so dass eine jede gegebene Zahl gleich ist $p^2+p \pm q^2$, woselbst p et q numeros integros anzeigen, oder auch eine von beiden litteris 0 bedeuten kann; woraus zu sehen ist, dass eine jede Zahl aus einem duplo numeri triangularis $\pm$ numero quadrato bestehet. Weil aber auch eine jede Zahl gleich ist der Formul

$$u^2 + v^2 + v + y^2 + y - x^2,$$

so wird, wenn man setzet $u = \frac{z^2+z}{4} + 1$, $x = \frac{z^2+z}{4} - 1$, $u^2 - x^2 = z^2 + z$, folglich jedes numeri dati dimidium

$$\frac{n}{2} = \frac{v^2+v+y^2+y+z^2+z}{2},$$

id est tribus trigonalibus.

Dass in der formula polygonalium $\frac{(p-2)x^2-(p-4)x}{2}$, wenn sie gleich werden soll $4mn-m-n$, p weder 5 ± 2 noch 5 ± 1 seyn könne, sondern alle trigonales, tetragonales, hexagonales und heptagonales ausgeschlossen werden, folget ex iisdem principiis.

Ich halte es nicht für undienlich, dass man auch diejenigen propositiones anmerke, welche sehr probabiles sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration fehlet, denn wenn sie auch nachmals falsch befunden werden, so können sie doch zu Entdeckung einer neuen Wahrheit Gelegenheit geben. Des Fermatii Einfall, dass jeder numerus $2^{2^{n-1}} + 1$ eine seriem numerorum primorum gebe, kann zwar, wie Ew. bereits gezeiget haben, nicht bestehen; es wäre aber schon was Sonderliches, wenn diese series lauter numeros unico modo in duo quadrata divisibiles gäbe. Auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardiren: dass jede Zahl, welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist, ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey, als man will (die unitatem mit dazu gerechnet), bis auf die congeriem omnium unitatum *); zum Exempel

$$4 = \begin{cases} 1+3 \\ 1+1+2 \\ 1+1+1+1 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases}$$

$$6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad \text{etc.}$$

*) Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, dass sich die conjecture in summo rigore demonstriren lässet in casu $n+1$, si successerit in casu n, et $n+1$ dividi possit in duos numeros primos. Die Demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 1, ein aggregatum trium numerorum primorum sey. G

Hierauf folgen ein Paar observationes, so demonstriret werden können:

Si v sit functio ipsius x ejusmodi, ut facta $v = c$ numero cuicunque, determinari possit x per c et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x in aequatione $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$.

Note marginale d'Euler:

$v^{2n+1} - (vv+v)(v+1)^{n-1}$ divisib. per $vv - v - 1$
addatur $(vv - v - 1)(v+1)^{n-1}$
$v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1}$ divisib. per $vv - v - 1$.

Si concipiatur curva cujus abscissa sit x, applicata vero sit summa seriei $\frac{x^n}{n.2^{2n}}$, posita n pro exponente terminorum hoc est, applicata $= \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} +$ etc., dico, si fuerit abscissa $=$

1, applicatam fore $= \frac{1}{3}$ $\left\{ \begin{array}{l} = l\frac{4}{3}, \text{ nam sit haec applicata } = y, \\ \text{erit } y = l \cdot \frac{4}{4-x}. \quad \textit{Note marginale d'Euler} \end{array} \right\}$

2 . . . . $l2$
3 . . . . $2l2$
4 vel major . . . infinitam.

Goldbach.

P. S. Die beiden andern formulas numerorum non quadratorum, deren Ew. Erwähnung thun, habe ich noch nicht untersuchet, ich glaube aber, dass selbige, wenn man setzet

$$a = hx + k, \quad b = lx + m, \quad c = nx + p$$

sich wohl möchten unter nachfolgende Formul rangiren lassen, allwo f, g, γ, δ numeri integri affirmativi sind

$$\begin{array}{l} (2f - 4\gamma\delta)x^2 + 4(f - 2\gamma\delta)(2g - \delta^2)x + (2g - \delta^2)^2 \\ \quad - 4\gamma^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2f \qquad\qquad - 2g \end{array}$$

denn diese kann niemals ein quadratum geben . . . .

Positis m et p numeris integris affirmativis, haec expressio $\frac{p + 2 \pm \sqrt{(4p - m + 3)}}{m}$ non potest fieri numerus integer.

LETTRE XLIV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Travaux d'Euler. Sommation des séries des puissances réciproques. Formules à exposans imaginaires. Recherches sur les nombres et diviseurs. Sur les deux théorèmes de la lettre précédente.

Berlin d. 30 Juni 1742.

— — Ich werde nun bald wieder eine Dissertation nach Paris schicken Sur la meilleure manière d'observer l'inclinaison de l'aiguille aimantée, und da ich bei dieser Gelegenheit auf die theoriam magnetis meditirt, so habe ich endlich ein sehr simples und den legibus naturae gemässes systema gefunden, wodurch ich alle proprietates und phaenomena magnetis et ferri auf eine sehr leichte und deutliche Art erklären kann, über welche Materie ich künftiges Jahr eine pièce nach Paris senden werde.

Letztens habe ich wiederum eine pièce nach Petersburg de oscillationibus pendulorum flexibilium geschickt, und nächstens wird hier der 7te tomus Miscellaneorum zum Vor-

schein kommen, darin ich eine ziemliche Anzahl Pièces gegeben. Einige davon handeln von einer neuen Art die summas serierum potestatum reciprocarum zu finden. Erstlich habe ich eine Methode gegeben alle formulas differentiales rationales zu integriren, da dann das integrale, wenn dasselbe nicht algebraicum ist, entweder a logarithmis, oder a quadratura circuli, oder von beiden zugleich dependiret. Hieraus habe ich das integrale dieser Formul $\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ generaliter exprimirt und dabei gefunden, dass wenn man setzt $x = 1$, alsdann im integrali sich die membra logarithmica destruiren, und nur diejenigen, so a quadratura circuli dependiren, übrigbleiben, welche zusammengenommen endlich auf diese Expression $\frac{\pi \cos \frac{m}{n}\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi}$ reducirt werden. Hierauf habe ich die Formul $\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ per series integrirt, modo ordinario, und nachdem ich $x = 1$ gesetzet, diese Aequation gefunden

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n}\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{etc.}$$

alwo $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam bedeutet, und folglich posito radio, seu sinu toto $= 1$, die halbe peripheria oder der arcus 180^0 durch π angedeutet wird; und also wird $\frac{m}{n}\pi$ ein arcus determinatus, davon man den sinum und cosinum anzeigen kann. Nun setze ich $\frac{m}{n} = x$, so kommt diese series heraus

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{etc.}$$

*

Setzt man $x = \frac{1}{4}$, so wird $\pi x = 45^0$ und $\cos \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\sin \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und folglich $\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} -$ etc. Hieraus kann man aber per differentiationem auf höhere potestates kommen, denn sumto x variabili, ist $d.\cos \pi x = -\pi dx \sin \pi x$ und $d.\sin \pi x = \pi dx \cos \pi x$; dahero wird

$$d.\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{-\pi\pi dx (\sin \pi x)^2 - \pi\pi dx (\cos \pi x)^2}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-\pi\pi dx}{(\sin \pi x)^2}$$

ob $(\sin \pi x)^2 + (\cos \pi x)^2 = 1$, nempe quadrato radii. Also wenn die series auch differentiirt wird, so kommt

$$\frac{-\pi\pi dx}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{(1-x)^2} - \frac{dx}{(1+x)^2} - \frac{dx}{(2-x)^2} - \frac{dx}{(2+x)^2} - \text{etc.},$$

und durch $-dx$ dividirt

$$\frac{\pi\pi}{(\sin \pi x)^2} = \frac{1}{xx} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{4}$, weil $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so wird

$$2\pi\pi = \frac{16}{1} + \frac{16}{9} + \frac{16}{25} + \text{etc. oder } \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$

Man kann aber auch weiter differentiiren, und solchergestalt ad summas quarumque potestatum gelangen, denn es wird

$$d.\frac{\pi\pi}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-2\pi^3 dx \cos \pi x}{(\sin \pi x)^3} = \frac{-2dx}{x^3} + \frac{2dx}{(1-x)^3} - \frac{2dx}{(1+x)^3} + \text{etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi^3 \cos \pi x}{(\sin \pi x)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \text{etc.}$$

Sit $x = \frac{1}{4}$, erit $2\pi^3 = \frac{64}{1} - \frac{64}{3^3} + \frac{64}{5^3} - \frac{64}{7^3} +$ etc. Solchergestalt finde ich also die summas omnium potestatum und noch viel generaler als durch die vorhergebrauchte Methode, weil ich hier loco x quamcunque fractionem substituiren kann. Diese Methode habe ich dem Hn. Nicolao Bernoulli nach Basel geschrieben und erwarte darüber noch seine

Meinung*). Ich erinnere mich aber, dass Ew. schon vormals angemerkt haben, dass wenn man die Summ von dieser serie wisse $\frac{1}{a+\alpha x} + \frac{1}{b+\beta x} + \frac{1}{c+\gamma x} +$ etc., man daraus per differentiationem die Summ von dieser finden könne $\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n} + \frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n} + \frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n} +$ etc., wovon meine summatio hier ein casus ist.

Generaliter ist $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 2\cos A.pl2$. Wenn also $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ soll $= 0$ seyn, so muss $pl2$ einem solchen arcui circuli gleich seyn, dessen cosinus $= 0$. Diese Eigenschaft aber haben alle arcus in hac formula contenti $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, und folglich wird $p = \frac{(2n+1)\pi}{2l2}$. Dahero posito $p = \frac{(2n+1)\pi}{2l2}$ oder $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, so wird $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} = 2\cos A.xpl.2 = 2\cos A.\frac{(2n+1)x\pi}{2}$. Wenn also seyn soll $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}} = 2^{rp\sqrt{-1}} + 2^{-rp\sqrt{-1}}$, so muss $\cos A.\frac{(2n+1)q\pi}{2} = \cos A.\frac{(2n+1)r\pi}{2}$. Die cosinus aber von zweyen verschiedenen arcubus sind einander gleich, wenn entweder die summa oder differentia arcuum gleich ist einem multiplo von der ganzen Peripherie 2π. Dahero wird $\frac{(2n+1)q\pi}{2} \pm \frac{(2n+1)r\pi}{2} = 2m\pi$ und folglich $q \pm r = \frac{4m}{2n+1}$, so dass seyn wird

$$2^{\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}} + 2^{-\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}},$$

worin alles dasjenige enthalten ist, was Ew. von dieser Materie mir überschrieben haben.

Nicht nur alle Zahlen, welche diese Formul $4mn - m - n$ gibt, sind enthalten in $yy + y - xx$, sondern gar alle mögliche Zahlen, welche sowohl in $4mn - m - n$, als nicht darin begriffen sind, und also ist independenter

*) Voire la 1ère lettre de Nic Bernoulli dans le 2ème volume.

von diesem theoremate eine jede Zahl in dieser Formul $uu+vv+v+yy+y-xx$ enthalten. Hieraus lässt sich aber nichts ad resolutionem numeri cujusque in numeros trigonales vel quadratos schliessen, und da ein jeder Buchstab u, v, y und x eine jegliche Zahl andeutet, so kann man nicht für u, $\frac{zz+z}{4}+1$, noch für x, $\frac{zz+z}{4}-1$ setzen, weilen diese formulae $\frac{zz+z}{4}\pm 1$ nicht mehr alle möglichen Zahlen geben, welche doch durch u und x angedeutet werden. Denn da eine jede Zahl sogar in dieser Formul $uu-xx$ enthalten ist, so müsste, kraft dieser Substitution, auch eine jede Zahl in dieser $zz+z$ enthalten, und also ein numerus trigonalis seyn.

Wenn alle in dieser formula $2^{2^{n-1}}+1$ enthaltenen Zahlen nur unico modo in duo quadrata divisibiles wären, so müssten auch alle diese Zahlen nothwendig numeri primi seyn, welches aber nicht ist. Denn alle diese Zahlen sind in dieser formula $4m+1$ enthalten, welche so oft sie ein numerus primus ist, unfehlbar in duo quadrata, hocque unico modo, resolviret werden kann. So oft aber $4m+1$ kein numerus primus ist, so ist dieselbe Zahl entweder gar nicht resolubilis in duo quadrata oder pluribus uno modis. Dass aber $2^{32}+1$, welche Zahl kein numerus primus ist, zum wenigsten duobus modis in duo quadrata divisibilis sey, kann ich also zeigen: 1. Wenn a und b in duo quadrata resolubiles sind, so wird auch das Product ab in duo quadrata resolubile seyn; 2. Si productum ab et alter factor a fuerint numeri in duo quadrata resolubiles, tum quoque alter factor b in duo quadrata erit resolubilis. Diese theoremata können rigidissime demonstriret werden. Nun ist

$2^{32}+1$, welche Zahl in duo quadrata est resolubilis, nempe 2^{32} et 1, divisibilis per $641=25^2+4^2$. Dahero der andere factor, den ich brevitatis gratia b nennen will, gewiss auch eine summa duorum quadratorum. Sit $b=pp+qq$, ita ut sit $2^{32}+1=(25^2+4^2)(pp+qq)$, erit $2^{32}+1=(25p+4q)^2+(25q-4p)^2$ et simul $2^{32}+1=(25p-4q)^2+(25q+4p)^2$ und folglich zum wenigsten duobus modis eine summa duorum quadratorum. Hieraus kann man nun die resolutionem duplicem a priori finden. Denn es wird $p=2556$ et $q=409$ und folglich $2^{32}+1=65536^2+1^2=62264^2+20449^2$. Dass eine jegliche Zahl, welche in zwey numeros primos resolubilis ist, zugleich in quot, quis voluerit, numeros primos zertheilt werden könne, kann aus einer Observation, so Ew. vormals mit mir communicirt haben, dass nehmlich ein jeder numerus par eine summa duorum numerorum primorum sey, illustrirt und confirmirt werden. Denn, ist der numerus propositus n par, so ist er eine summa duorum numerorum primorum, und da $n-2$ auch eine summa duorum numerorum primorum ist, so ist n auch eine summa trium, und auch quatuor u. s. f. Ist aber n ein numerus impar, so ist derselbe gewiss eine summa trium numerorum primorum, weil $n-1$ eine summa duorum ist, und kann folglich auch in quotvis plures resolvirt werden. Dass aber ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann. — Dass $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p-m+3)}}{m}$ nimmer ein numerus integer werden könne, erhellet daher, weilen wenn man diese Formul einem numero integro n gleich setzt, herauskommt $p=mn\pm\sqrt{(4mn-1)}$; es kann aber $4mn-1$ kein quadratum seyn.

Ew. theorema, dass wenn man ex aequatione $v = c$, existente v functione quapiam ipsius x, die radicem x finden kann, man auch ex hac aequatione

$$v^{2n+1} = (2v + 1)(v + 1)^{n-1}$$

den valorem ipsius x bestimmen könne, — hat mich zu ergründen viel Mühe gekostet, bis ich endlich gemerket, dass diese Aequation $v^{2n+1} - (2v + 1)(v + 1)^{n-1} = 0$ divisibilis sey per $vv - v - 1$. Denn es ist

$$v^{2n+1} - (2v + 1)(v + 1)^{n-1} = v(v^{2n} - (v + 1)^n) + (vv - v - 1)(v + 1)^{n-1}$$

und $v^{2n} - (v + 1)^n$ ist durch $vv - (v + 1)$ divisibilis. Quicquid ergo sit n, aequationi $v^{2n+1} = (2v + 1)(v + 1)^{n-1}$ satisfacit $vv = v + 1$, und ist also $v = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aus welcher Aequation man per hypothesin die radicem x finden kann.

Si concipiatur curva, cujus abscissa posita $= x$, applicata sit $y = \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} +$ etc. erit generaliter $y = l\frac{4}{4-x}$, und folglich ist die curva eine logarithmica, darin die applicata zum asymtoto wird, wenn $x = 4$. Es sey (Fig. 6) VCB eine logarithmica ordinaria asymtoton habens VD, deren subtangens constans $AT = 1$. Capiatur applicata $AC = 1$, et ducta alia quacunque PM, positisque $AP = t$, et $PM = u$, erit $t = lu$, seu $udt = du$. Jam ducatur applicata $DB = 4AC = 4$, erit $AD = l4$, et ducta MQ, fiet $BQ = x$ et $QM = y$ pro casu proposito. Erit enim $AP = t = l4 - y$ et $PM = u = 4 - x$, unde ob $t = lu$ erit $l4 - y = l(4 - x)$ et $y = l \cdot \frac{4}{4-x}$. Sonsten haben Ew. pro summa seriei ipsi y aequalis casu $x = 1$ geschrieben $\frac{1}{3}$, da diese Summ ist $= l \cdot \frac{4}{3}$.

Euler.

LETTRE XLV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Sur un passage des oeuvres de Wallis, relatif au déchiffrement. Réponse à la lettre précédente. Considérations sur la sommation des séries. Théorème de géométrie.

Moscau d. 30. Juli n. St. 1742.

Ich gratulire Ew. zu der bevorstehenden perpetuellen Pension aus Paris, denn es scheinet je länger je mehr, dass Ew. die dortige Académie des sciences sich bey Austheilung der Preise gänzlich tributaire machen werden....

Ich erinnere mich in den von Wallisio dechifrirten Briefen einige Stellen angemerket zu haben, die einer andern interprétation bedürfen, wie es Ew., wenn sie nachfolgende remarques mit den Briefen selbst conferiren wollen, ohne Zweifel befinden werden. Tom. III Op. p. 666 lin. 4 hatte in dem Briefe gestanden 125. 44. 24. 123. 68. 28. Er setzet anstatt 24 die Zahl 26 und lieset

125.	44.	26.	123.	68.	28,
co	*n*	*d*	*ui*	*st*	*e*

welches kein französisches Wort ist, da doch vielmehr von dem Copisten die zwei Zahlen 40 und 20, oder die eine 348 ausgelassen worden und das ganze Wort heissen soll *Conclaviste*. Lin. 10 ibid. setzet er für 128 die Zahl 138 und interpretiret sie *Hongrois*; es ist aber viel wahrscheinlicher dass 128 recht geschrieben und *homme* heisst. Auch ist nicht zu sehen, warum pag. 665 lin. 7 von unten, die Zahl 380, welche er gar nicht in den clavem gesetzet, *pall* heissen soll, da dieselbe vielmehr *paye* bedeuten wird. Die Zahl 136, welche er gar nicht interpretirt, soll vermuthlich heissen *Dame*. Dessen ohngeachtet halte ich die von Wallisio bewerkstelligte Dechifrirung vor einen grossen effort de l'esprit humain. Er gestehet aber aufrichtig, dass ihm unterschiedene chifrirte Briefe in die Hände gekommen, daraus er nichts finden können.

Ich sehe wohl, dass bey meinen Briefen allezeit die Erinnerung nöthig ist: Omnia probate, weil es mehrentheils an gehöriger Attention fehlet; indessen wird es mir doch lieb seyn, wenn nur Etwas darin enthalten ist, so Ew. Approbation meritiret. An die Observation, welche Sie mir schon längst communiciret, dass die numeri $4m+1$ nur auf einerley Art in zwey quadrata getheilt werden können, habe ich damals, als ich den letzten Brief geschrieben, nicht gedacht. Dass alle Zahlen in der formula y^2+y-x^2 begriffen sind, ist gewiss; doch hätte dieses meiner damaligen Intention nichts gehindert, wenn nur die suppositiones $u=\frac{z^2+z}{4}+1$ und $x=\frac{z^2+z}{4}-1$ aus zulänglichen Gründen wären hergeleitet worden. Denn wie es in dieser Proposition: Quilibet numerus est aequalis tribus trigonalibus uni affirmativo et duobus negativis, darauf nicht ankommt, dass in

den tribus formulis $\frac{x^2+x-y^2-y-z^2-z}{2}$, x, y und z alle nur mögliche Zahlen bedcuten, sondern vor x auch gar wohl gesetzt werden kann $2u^2$, wenn man nur erweiset, dass diese adhibita substitutio dem numero cuicunque dato, so aus der ganzen erwähnten Formul herauskommen soll, nicht hinderlich ist, so würde es auch mit dem casu, dass jeder numerus aus tribus trigonalibus bestehet, eine gleiche Bewandniss haben, wenn die suppositio $x=\frac{z^2+z}{4}+1$ gnugsam gegründet wäre.

Bald nachdem ich meinen Brief geschrieben hatte, sahe ich, dass die Observation $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p\ \ m+3)}}{m}=$ numero integro von keiner Erheblichkeit ist. Vielleicht sind diese etwas besser: $1+16a^2+16b^2$ nunquam habet radicem hujus formae $4n-1$, sed semper hujus $4n+1$. Numerus $4x^4+1$ in unico casu est primus, si $x=1$.

Gleich wie es aber series numerorum gibt, welche entweder nicht können durch $4n-1$ dividiret werden, oder gar numeri primi sind, so wären auch dergleichen series von Zahlen zu suchen, die entweder numeri primi sind, oder durch $4n+1$ nicht können dividiret werden, oder wenigstens den divisorem minimum niemals hujus formae $4n+1$ haben; denn so oft es sich träfe, dass ein terminus ejus seriei gleich würde a^2+1, könnte man demonstriren, dass es ein numerus primus sey. In der serie numerorum trigonalium unitate auctorum sind gewiss sehr wenige casus, da der divisor minimus ad hanc formam $4n+1$ gehöret. Einer von diesen casibus ereignet sich, wenn der exponens termini ist 252, und der numerus trigonalis unitate auctus aus den factoribus 29 und 401 bestehet. Wenn man aber dergleichen casus, in quibus divisor minimus est hujus formae $4n+1$ durch eine generale Exception ausschliessen könnte, so wären alle termini hujus formae a^2+1, in sofern sie in selbiger Exception nicht begriffen sind, numeri primi.

Was ich von $v^{2n+1}=(2v+1)(v+1)^{n-1}$ geschrieben hatte war blos ex consideratione numeri $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ hergenommen, ohne zu vermuthen, dass die aequatio dividirt werden könnte, welches doch, wie ich jetzo sehe, in dergleichen Fällen unumgänglich nöthig ist.

So viel ich mich erinnere, ist mir niemals eine Methode data summa seriei $\frac{1}{a+\alpha x}+\frac{1}{b+\beta x}+\frac{1}{c+\gamma x}+$ etc. inveniendi summam $\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+$ etc. bekannt gewesen, ausser in dem Fall, da summa prioris seriei aus einer bekannten functione ipsius x bestehet; solchergestalt wird auch dato $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+$ etc. summabili, die series $\alpha x+2^n\beta x^2+3^n\gamma x^3+4^n\delta x^4+$ etc. summabilis; welches aber nichts sonderliches ist, da hingegen die grösste Schwierigkeit darin bestehet, dass man in Ermangelung einer solchen functionis finitae ipsius x, eine expressionem aequivalentem substituiren und selbige hernach immer weiter differentiiren könne, wie Ew. es mit den sinibus arcuum circuli gemachet. Indessen will ich doch ein theorema hieher setzen, so mir nur seit einigen Tagen eingefallen: Sint tres series: $A \ldots a+b+c+d+$ etc., $B \ldots ab+(a+b)c+(a+b+c)d+$ etc., $C \ldots a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc., dico esse $B=\frac{A^2-C}{2}$, unde sequitur cognitis summis duarum serierum ex his tribus, dari etiam summam tertiae seriei, et

cognita summa unius seriei, dari etiam rationem, quam alterutra series reliquarum habet ad alteram. Sit ex gr. $a=\frac{1}{m}$, $b=\frac{1}{m^2}$, $c=\frac{1}{m^3}$ etc. erit $B=\frac{1}{(m+1)(m-1)^2}$. Sit $a=1$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{5}$, $d=-\frac{1}{7}$ (signis post binos quosque terminos alternantibus) erit series $B=0$. Si ponatur $\frac{1}{2^n}-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n}+\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{1}{4^n}-$ etc. $=f\pi^{2n}$, ubi $\pi=$ circumferentiae circuli cujus diameter 1, erit f functio ejusmodi ipsius n, quae posito $n=1$ fiat $=\frac{6p^2-\pi^2}{12}$, ubi $p=l2$. Si vero n ponatur numerus integer major unitate, tota functio fiat numerus rationalis, propterea quod in illa functione his casibus quantitates numeris p et π affectae sese destruunt. Hiebey habe ich observiret, dass $1+p^2=\frac{3\pi^2}{20}$ fere.

Ich möchte wohl wissen, ob Ew. die summas nachfolgender serierum $ab^2+(a+b)c^2+(a+b+c)d^2+$ etc. und $a^2b+(a^2+b^2)c+(a^2+b^2+c^2)d+$ etc., wenn $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$, oder $a+b+c+$ etc. $=l2$ per logarithmos et quadraturam circuli exprimiren können?

Neulich fand ich einen Zettel, darauf von meiner Hand, vermuthlich schon vor einigen Jahren, geschrieben war: Seriei $1+2^p+3^p+4^p+$ etc. summa ad datum terminum x est:

$$1+2^p(x-1)+(3^p-2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)+$$

$$(4^p-2.3^p+2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right)+$$

$$(5^p-3.4^p+3.3^p-2^p)(x-1)\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{3}\right)\left(\frac{x-4}{4}\right)+\text{etc.}$$

quae series abrumpitur si p sit numerus integer affirmativus, nec plures continet terminos quam $p+2$ continet unitates.

Auf einem andern Zettel fand ich Folgendes: Ex his formulis

I. u^n

II. $nu^{n+1} - (n+1)u^n$

III. $n^2 u^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)u^{n+1} + (n+1)^2 u^n$

IV. $n^3 u^{n+3} - (3n^3+3n^2-3n+1)u^{n+2} + (3n^3+6n^2-4)u^{n+1}$
$-(n+1)^3 u^n$,

quae in infinitum continuari possunt ea lege, ut si antecedens fuerit

$$n^p u^{n+p} + \alpha u^{n+p-1} + \beta u^{n+p-2} + \gamma u^{n+p-3} + \text{etc.},$$

sequens fiat

$$\begin{array}{llll} n^{p+1} u^{n+p+1} & - n^p(n+p+1)u^{n+p} & - \alpha(n+p)u^{n+p-1} & \\ & + \alpha(n+1) & + \beta(n-2) & \\ & & - \beta(n+p-1)u^{n+p-2} & - \text{etc.} \\ & & + \gamma(n-3) & + \text{etc.} \end{array}$$

Sumatur formula quaecunque A et in casu particulari, ubi fit $n = 0$, eadem formula ponatur $= B$, dico $\frac{A-B}{(u-1)^{p+1}}$ esse summatricem seriei $1 + 2^p u + 3^p u^2 + 4^p u^3 \ldots + n^p u^{n-1}$. Sit exempli causa $p = 1$, erit $A = nu^{n+1} - (n+1)u^n$, et in casu particulari, ubi $n = 0$, transit A in $-1 = B$, quapropter

$$\frac{A-B}{(u-1)^2} = \frac{nu^{n+1} - (n+1)u^n + 1}{(u-1)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 \ldots + nu^{n-1}.$$

Sonst habe ich auch bemerket, dass die summa seriei $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} + \text{etc.}$ gleich sey

$$\frac{1}{2n} x^n (x+1)^n - \frac{(n-2)}{2^2.3} x^{n-1}(x+1)^{n-1} +$$
$$\frac{(7n-8)(n-1)(n-3)}{2^4.3^2.5} x^{n-2}(x+1)^{n-2} - \text{etc.},$$

oder (posito $y = x(x+1)$) erit summatrix

$$= \frac{1}{2n}(y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots my^2),$$

ubi a, b, etc. determinantur hoc modo:

$$(n-1)a + n(n-1)(n-2) = 0$$

$$(n-2)b + \frac{a(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} = 0$$

$$(n-3)c + \frac{b(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3} + \frac{a(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3.4.5.6.7} = 0.$$

Sollte auch hierin etwas verschrieben seyn, so kann ich es doch gleich rectificiren, wie denn auch dasjenige, was jetzo von den exponentibus paribus gesagt worden, auf alle exponentes in genere zu extendiren nicht schwer seyn würde.

In den compendiis geometricis, wo das theorema Pythagoricum demonstriret wird, sollte man billig solches auch von allen figuris similibus demonstriren, woraus denn dieses corollarium folget: Si (Fig. 7) triangulum rectangulum ABC tangatur a curva quacunque $AFBGC$ in tribus punctis A, B, C, et super basibus AB et BC describantur curvae ADA, BEC, ipsi curvae ABC per omnia similes, nec sese in aliis punctis, praeter A, B, C intersecantes, fore (deductis segmentis cancellatis AFB, BGC) reliquas quasi-lunulas $ADBF + BECG = \triangle ABC$, quae quasi-lunulae in lunulas veras transibunt, si curva ABC fuerit semicirculus.

Goldbach.

LETTRE XLVI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Pièces de concours aux prix des académies de Paris et de Dijon. Recherches sur les nombres et les diviseurs. Considérations ultérieures sur les séries.

Berlin d. 28. August 1742.

Dass Ew. mir einen beständigen Tribut von der Akademie zu Paris prophezeien, erkenne ich als eine deutliche marque Dero gegen mich hegenden besondern Wohlgewogenheit mit der schuldigsten Dankbarkeit. Ob ich aber gleich zu Erhaltung dieses Vortheils meinerseits nicht ermangeln lasse, so scheinet doch meine von hieraus abgeschickten pièцen eben dasjenige Schicksal betroffen zu haben, welches vor etlichen Jahren den Hn. Cammerherrn Korff so viel Mühe gekostet hat zu redressiren. Denn ich habe schon zu Anfang des vorigen Monats meine pièce über die Inclination des Magneten an den Hn. De Mairan geschickt, und gleichwohl noch keine Antwort, dass selbige angekommen, erhalten. Hernach

hatte ich verwichenen Martium eine pièce über den motum fluidorum in canalibus elasticis an die Académie des sciences nach Dijon, von welcher über diese Materie ein Preis von 30 Louisd'or bestimmt war, gesandt, und gleichfalls darüber noch keine Antwort empfangen, welches mich glauben macht, dass diese beiden Pièцen entweder irgendwo aufgehalten, oder gar verloren gegangen seyn müssen, wobei ich nur dieses am meisten bedauere, dass ich von diesen beiden Pièцen keine Copien gehalten habe. — — —

Ew. Emendationen der von Wallisio dechiffrirten Briefe halte ich für ganz richtig, erkenne aber dabei mein Unvermögen, selbsten diese tiefsinnige Materie zu untersuchen.

Dass diese Expression $\sqrt{(1+16aa+16bb)}$ niemals eine Zahl von dieser Form $4n-1$ geben könne, ist ein sehr schönes theorema, davon die Demonstration nicht so leicht in die Augen fällt. Denn gesetzt, dass

$$4n-1=\sqrt{(1+16aa+16bb)},$$

so würde $16nn-8n=16aa+16bb$ und folglich

$$n(2n-1)=2(a^2+b^2).$$

Weilen nun $2(aa+bb)$ ein numerus par ist, so müsste n ein numerus par seyn, indem $2n-1$ gewiss impar ist. Es sey also $n=2p$, so wird $2p(4p-1)=2(aa+bb)$ und dannenhero $4p-1$ ein divisor formulae $aa+bb$, welches nicht seyn kann: oder $p(4p-1)$ müsste eine summa duorum quadratorum seyn, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Dass $4x^4+1$ niemals ein numerus primus seyn könne, ausser dem casu wenn $x=1$, ist kein Wunder, weilen diese formula generaliter in duos factores resolviret werden kann, denn es ist $4x^4+1=(2xx+2x+1)(2xx-2x+1)$.

Ob es solche series numerorum gebe, welche entweder durch $4n+1$ nicht divisibiles, oder gar numeri primi sind, zweifle ich sehr. Wenn aber gleichwohl dergleichen sich finden sollten, so würde man daraus einen grossen Vortheil zu Erfindung der numerorum primorum ziehen können.

Uebrigens halten die divisores primi aller serierum von Zahlen, welche in dieser formula enthalten sind $\alpha xx \pm \beta yy$, eine sehr artige Ordnung, welche, ungeachtet ich davon noch keine Demonstration habe, dennoch ihre völlige Richtigkeit zu haben scheint. Ich nehme deswegen die Freyheit Ew. einige dergleichen theoremata zu überschreiben, aus welchen noch unendlich viel andere hergeleitet werden können.

I. Si x et y sunt numeri primi inter se, haec formula $xx + yy$ per alios numeros primos non est divisibilis, nisi qui contineantur in hac forma $4n + 1$, atque hi numeri primi omnes ipsi in hac forma $xx + yy$ continentur. Dieses bekannte theorema setze ich voraus, um die Connexion der übrigen desto besser vor Augen zu legen.

II. Haec formula $2xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $8n + 1$ vel $8n + 3$ contineantur. Et quoties $8n + 1$ vel $8n + 3$ fuerit numerus primus, erit is aggregatum ex quadrato et duplo alterius quadrati, seu erit formae $2xx + yy$.

III. Haec formula $3xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $12n + 1$ et $12n + 7$ (oder in dieser einzelnen $6n + 1$) contineantur. Et quoties $6n + 1$ est numerus primus, continebitur in forma $3xx + yy$.

IV. Haec formula $5xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $20n + 1$, $20n + 3$, $20n + 9$, $20n + 7$ contineantur, et omnis numerus primus in una harum quatuor formularum contentus erit ipse numerus formae $5xx + yy$.

V. Haec forma $6xx + yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in una harum quatuor formularum $24n + 1$, $24n + 5$, $24n + 7$, $24n + 11$ contineantur, et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $6xx + yy$.

VI. Haec forma $7xx + yy$ alios divisores primos non habet nisi qui in una harum 6 formularum $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 11$, $28n + 15$, $28n + 23$, $28n + 25$ (oder in einer dieser dreyen $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$) contineantur, et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $7xx + yy$.

Nun aber ist omnis numerus trigonalis unitate auctus in dieser formula $7xx + yy$ enthalten, und folglich können die numeri trigonales unitate aucti keine andern divisores primos haben, als welche in diesen formulis $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$, oder welches gleich viel, in dieser $7xx + yy$ enthalten sind. Hieraus lassen sich nun leicht alle numeri primi finden, welche einen numerum trigonalem unitate auctum dividiren. Solche sind nehmlich 1, 11, 23, 29, 37, 43, 53, 67, 71, 79, etc. Dahero können keine andere numeri primi hujus formae $4m + 1$ divisores seyn numeri trigonalis unitate aucti, als welche in einer von diesen drey formulis begriffen sind $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 25$.

Hieraus ist also klar, dass diese Expression $pxx + yy$ keine andere divisores habe, als welche in einer gewissen Anzahl von solchen formulis $4pn + s$ enthalten sind, allwo s einige Zahlen bedeutet, welche, ob sie gleich keine Ordnung unter sich zu haben scheinen, dennoch nach einer schönen lege fortgehen, welche aus diesen theorematis erhellet:

VII. Si numerus primus formae $4pn + s$ fuerit divisor formulae $pxx + yy$, tum etiam omnis numerus primus in hac forma generaliori contentus $4pn + s^k$ erit divisor formulae $pxx + yy$ atque etiam ipse erit numerus formae $pxx + yy$. Ex. gr. Quia numerus primus $28n + 9$, est numerus formae $7xx + yy$, erunt etiam numeri primi $28n + 81$ $(28n + 25)$: $28n + 729$ $(28n + 1)$ etc. numeri formae $7xx + yy$.

VIII. Si duo numeri primi $4pn + s$ et $4pn + t$ fuerint divisores formulae $pxx + yy$, tum omnis numerus primus hujus formae $4pn + s^k t^i$ erit simul numerus formae $pxx + yy$.

Wenn man also von einer solchen Expression $pxx + yy$ schon einige divisores primos entdecket hat, so kann man durch diese theoremata leicht alle mögliche finden. Als, es sey diese Formul gegeben $13xx + yy$, worin diese Zahlen 14, 17, 22, 29, 38, 49, 62 etc. enthalten sind. Numeri igitur primi, qui sunt divisores formulae $13xx + yy$ erunt 1, 7, 11, 17, 19, 29, 31. Folglich müssen alle numeri primi in his formulis $52n + 1$, $52n + 7$, $52n + 11$ etc. divisores von $13xx + yy$ seyn können. Die Formul $52n + 7$ gibt aber nach dem theorema VII noch diese $52n + 49$, $52n + 343$ (oder $52n + 31$), $52n + 7.31$, oder $52n + 9$, ferner $52n + 7.9$, oder $52n + 11$, ferner $52n + 7.11$, oder $52n + 25$, ferner $52n + 7.25$, oder $52n + 19$, ferner $52n + 7.19$, oder $52n + 29$, ferner $52n + 7.29$, oder $52n + 47$, ferner $52n + 7.47$, oder $52n + 17$, ferner $52n + 7.17$ oder $52n + 15$, ferner $52n + 7.15$, oder $52n + 1$ und hier ändert sich die Verschiedenheit der Zahlen, welche zu $52n$ gesetzt werden können, um numeros primos in forma $13xx + yy$ contentos hervorzubringen. Also nur allein daraus, dass 7 ein divisor formae $13xx + yy$ seyn kann,

weisen die beiden letzten theoremata, dass alle numeri primi in his formulis

$52n + 1$; $52n + 31$; $52n + 25$; $52n + 47$
$52n + 7$; $52n + 9$; $52n + 19$; $52n + 7$
$52n + 49$; $52n + 11$; $52n + 29$; $5\ n + 15$

contenti diese Form $13xx + yy$ haben und auch divisores von solchen Zahlen $13xx + yy$ seyn können, und mehr formulae können auch durch die theoremata nicht herausgebracht werden. Dahero gewiss ist, dass kein anderer numerus primus ein divisor formae $13xx + yy$ seyn kann, als welcher in einer der gefundenen 12 Formuln enthalten ist. Weilen nun ein jeder numerus primus in hac forma contentus $4pn + 1$ ein divisor von $pxx + yy$ seyn kann. Hieher können schöne proprietates hergeleitet werden, als z. Ex. weil 17 ein numerus primus und auch von dieser Form $2xx + yy$, so ist gewiss, dass so oft $17^{m} \pm 8n$ ein numerus primus ist, solcher auch eine solche Zahl $2xx + yy$ seyn müsse. Und wenn $17^{m} \pm 8n$ eine Zahl ist von dieser Form $2xx + yy$ und doch keinen divisorem von dieser Form admittirt, so ist dieselbe gewiss ein numerus primus.

Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den divisoribus hujusmodi formularum $pxx - yy$ oder $xx - pyy$, welche wenn sie primi sind, in dieser Form $4np \pm s$ enthalten seyn müssen, da s einige determinirte Zahlen bedeutet. Nehmlich in einigen Fällen wird seyn

1. Omnes divisores primi formae $xx - yy$ continentur in $4n \pm 1$, welches klar.

2. Omnes divisores primi formae $2xx - yy$ continentur in $8n \pm 1$.

Coroll. Ergo numerus primus $8n \pm 3$ non est numerus formae $2xx - yy$.

3. Omnes divisores primi formae $3xx - yy$ continentur in forma $12n \pm 1$.

4. Omnes divisores primi formae $5xx - yy$ continentur vel in $20n \pm 1$ vel in $20n \pm 9$ (oder in dieser einzeln $10n \pm 1$).

etc.

Et si numerus primus $4pn + s$ fuerit divisor formae $pxx - yy$ oder $xx - pyy$, tum $\pm 4np \pm s^k$ erit ipse numerus formae $pxx - yy$ vel $xx - pyy$, quoties fuerit numerus primus. Si duo numeri primi s et t fuerint numeri formae $pxx - yy$, tum quoties $\pm 4np \pm s^\mu t^\nu$ fuerit numerus primus, simul erit numerus formae $pxx - yy$. Also weil 7 und 17 numeri primi und von dieser Form $2xx - yy$ sind, so wird auch $\pm 8n \pm 7^\mu . 17^\nu$ eine Zahl von dieser Form seyn, so oft dieselbe ein numerus primus ist. Es sey $\mu = 1$, $\nu = 1$, so ist $7.17 = 119$ und $119 + 8 = 127 =$ numero primo, folglich wird seyn $127 = 2xx - yy = 2.64 - 1$. Hieraus ist nun klar, dass es nicht möglich ist Suiten von Zahlen, so in einer solchen Formul $pxx \pm qyy$ begriffen sind, zu finden, welche nicht divisores von dieser Art $4n + 1$ admittiren sollten.

Ich glaube aber fest, dass ich diese Materie bei weitem noch nicht erschöpfet habe, sondern, dass sich darin noch unzählig viele herrliche proprietates numerorum entdecken lassen, wodurch die doctrina de divisoribus zu einer weit grösseren Vollkommenheit gebracht werden könnte; und bin dabei gewiss, dass wenn Ew. diese Materie einiger Attention würdigen werden, Dieselben darin sehr wichtige Découverten machen würden. Der grösste Vortheil würde

aber sich alsdann recht zeigen, wenn man für diese theoremata demonstrationes finden sollte.

Wenn drey Series also beschaffen sind, dass $A = a + b + c + d +$ etc., $B = ab + (a + b)c + (a + b + c)d +$ etc. et $C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +$ etc., so ist B die summa factorum ex binis terminis seriei A, und ist folglich die dupla summa factorum ex binis, $2B$, una cum summa quadratorum singulorum C gleich dem quadrato seriei A, seu $2B + C = AA$ et $B = \frac{AA - C}{2}$. Solche theoremata können auf höhere potestates extendirt werden. Als wenn

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + d + \text{etc.} \\ B &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} \\ C &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} \\ D &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

so wird seyn terminorum a, b, c, d, e etc.

summa factorum ex binis $= \frac{A^2 - B}{2}$

„ „ ex ternis $= \frac{A^3 - 3AB + 2C}{6}$

„ „ ex quaternis $= \frac{A^4 - 6A^2B + 8AC + 3B^2 - 6D}{24}$

etc.

Wenn Ihre mir proponirten Series gesetzt werden

$$P = ab^2 + (a + b)c^2 + (a + b + c)d^2 + (a + b + c + d)e^2 + \text{etc.}$$

$$Q = a^2b + (a^2 + b^2)c + (a^2 + b^2 + c^2)d + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)e + \text{etc.}$$

so wird seyn $P + Q = AB - C$, folglich wenn

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

$$B = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

$$C = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \text{etc.}$$

so kann die summa der beiden serierum $P+Q$ nicht per logarithmos et quadraturam circuli angegeben werden, weilen die series C noch nicht summirt werden kann. Viel weniger kann also eine jede für sich summirt werden. Wenn aber dieses geschehen könnte, so hätte man die summam seriei C, welche ich bisher vergebens gesucht. Die valores $1+p^2$ und $\frac{3\pi^2}{20}$, wenn $p=l2$, differiren so wenig von einander, dass ich dieselben bald für völlig gleich gehalten hätte; ich habe deswegen beider valores genauer gesucht und gefunden $1+p^2=1,4804530139$ und $\frac{3}{20}\pi^2=1,48044066$.

Die formulae, welche Ew. mir für die summationem seriei $1+2^p+3^p+4^p+$ etc. usque ad datum terminum überschrieben, erinnere ich mich noch in Petersburg bei Denselben gesehen zu haben, und entspringet die erste Expression $1+2^p(x-1)+(3^p-2^p)\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}+$ etc. ex differentiis continuo sumtis, und die andern formulae kommen per differentiationem heraus. Um aber die summam in der bequemsten Form zu finden, so halte ich diese Art für die leichteste:

$$1+2^p+3^p+4^p\ldots+x^p=$$
$$\frac{x^{p+1}}{p+1}+\frac{x^p}{1.2}+\frac{p}{2.3}\cdot\frac{1}{2}x^{p-1}-\frac{p(p-1)(p-2)}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{6}x^{p-3}$$
$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-4)}{2.3\ldots7}\cdot\frac{1}{6}x^{p-5}-\frac{p(p-1)\ldots(p-6)}{2.3\ldots9}\cdot\frac{3}{10}x^{p-7}$$
$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-8)}{2.3\ldots11}\cdot\frac{5}{6}x^{p-9}-\frac{p(p-1)\ldots(p-10)}{2.3\ldots13}\cdot\frac{691}{210}x^{p-11}$$
$$+\frac{p(p-1)\ldots(p-12)}{2.3\ldots15}\cdot\frac{35}{2}x^{p-13}-\text{etc.}$$

allwo das Hauptwerk auf diese seriem fractionum ankommt, welche Ew. genugsam noch bekannt seyn wird:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}},\ \overset{2}{\frac{1}{6}},\ \overset{3}{\frac{1}{6}},\ \overset{4}{\frac{3}{10}},\ \overset{5}{\frac{5}{6}},\ \overset{6}{\frac{691}{210}},\ \overset{7}{\frac{35}{2}},\ \overset{8}{\frac{3617}{30}},\ \overset{9}{\frac{43867}{42}},\ \overset{10}{\frac{1212277}{110}},\ \overset{11}{\frac{854513}{6}},$$
$$\overset{12}{\frac{1181820455}{546}},\ \overset{13}{\frac{76977927}{2}};$$

so weit habe ich sie continuirt. Der terminus generalis exponenti n respondens kann also exprimirt werden

$$(2n+1)\left(-\frac{1}{2}+\frac{(2^{2n}-2.1)}{3}-\frac{(3^{2n}-3.2^{2n}+3.1)}{4}\right.$$
$$\left.+\frac{(4^{2n}-4.3^{2n}+6.2^{2n}-4.1)}{5}\text{ etc.}\right)$$

welche gleichfalls abrumpirt wird.

Obgleich diese series $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. per quadraturam circuli exprimirt wird, so kann doch die Summ von dieser $x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+$ etc. nicht generaliter gegeben werden, und ausser dem casu $x=1$ habe bisher noch keinen andern, als wenn $x=\frac{1}{2}$, summiren können. Nehmlich posito $p=l2$ et $\pi:1=$ periph.: diam., so kommt heraus

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16.16}+\frac{1}{25.32}+\frac{1}{36.64}+\text{ etc.}=\frac{\pi\pi-6pp}{12}.$$

Endlich habe die Ehre noch dieses theorema hinzuzufügen, welches öfters einen grossen Nutzen haben kann:

Theorema. Si fuerit

$$s=1+\frac{a}{n+1}+\frac{aa}{2n+1}+\frac{a^3}{3n+1}+\frac{a^4}{4n+1}+\text{ etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2}=\frac{1}{2}+\frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{aa}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$+\frac{a^3}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$+\frac{a^4}{4n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{4n+1}\right)+\text{ etc.}$$

Leonh. Euler.

LETTRE XLVII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente. Introduction de deux nouveaux signes: 8 et $\div$. Globules de sang de Leuwenhoek. Notice littéraire.

Moscau d. 1 October st. n. 1742.

——— Dass $p(4p-1)$ keine summa duorum quadratorum seyn kann, wird von Ew. als bekannt angenommen; ich deducire es aber daher, quia $n = 2p \pm \sqrt{(4p^2 - p - a^2)}$, und dieses, quia $n^2 = 4pn - p - a^2$. Sonst habe ich auch gefunden, dass eine summa trium datorum quadratorum nicht gleich seyn kann dem facto ex duobus, multiplicato per quadratum par, oder dass $e^2 + f^2 + g^2 = 4e^2 f^2 p^2$; imgleichen si est $fmn - m - n = a^2$ (ubi f, m, n, a sint integri affirmativi), erit etiam $fp^2mn - m - n = a^2$, ubi p praeterea sit integer. Da es aber mit dem casu $f = 4$ bekanntermaassen in aequatione priori seine Richtigkeit hat, so wird auch $4mnp^2 - m - n = a^2$, und kann gar wohl seyn, dass f für sich selbst noch viele oder unzählige valores ausser dem quaternario hat, wie es sich denn findet, dass wenn alle divisores primi hujus numeri $3xx + yy$ (ubi x et y sunt numeri inter se primi) unter dieser formula $6n + 1$ begriffen sind (de quo dubitare nefas), f auch $= 12$ gesetzt werden kann, folglich $12mnp^2 - m - n = a^2$. Ich habe unter den remarques, so Ew. mir von den divisoribus formulae $px^2 + y^2$ communiciren wollen, insonderheit diese betrachtet, dass ein jeder numerus trigonalis unitate auctus in dieser formula $7xx + yy$ enthalten ist und dahero keine andere divisores primos haben soll, als welche in diesen formulis $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$ bestehen. Weil aber unzählige numeri trigonales (als z. Ex. 21) unitate aucti zu dieser Formul $7x^2 + y^2$ gleichwol nicht gebracht werden können, so verstehe ich Ew. theorema nur von den numeris trigonalibus paribus, quorum scilicet exponentes sunt hujus formae $4m - \frac{(1 \mp 1)}{2}$, denn dieser exponentium trigonales unitate aucti sind offenbar $7m^2 + (m \pm 1)^2$, und gehören alle, sie mögen primi oder non primi seyn, unter nachfolgende 4 classes: $7n + 0$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, welches jedoch mit Ew. Specification der divisorum (als worin der numerus 7 ausgelassen ist) nicht übereinkommet. Ich bin indessen Ew. für die Communication dieser besondern theorematum sehr verbunden, ohngeachtet ich nicht alles pro rei dignitate einsehen kann.

Nach dem von Ew. mir schon längst communicirten valore $l2$, hatte ich $1 + l2.l2$ gefunden 1480453017915 20..., welcher von den in Dero Schreiben angeführten Zahlen etwas differirt, weil aber der error sich erst nach der neunten Ziffer äussert, will ich den von Ew. angegebenen valorem lieber für wahr annehmen, als die Multiplication wiederholen.

Die 12 terminos seriei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, etc. habe ich auch schon längst abgeschrieben gehabt und den 13$^{\text{ten}}$ aus Dero letztem Briefe bereits dazu gesetzet.

Das quadratum seriei $s = 1 + \frac{a}{n-1} + \frac{a^2}{2n+1} + \text{etc.}$, welches ist

$$ss = 2\left(1 + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}\right)$$

scheinet nur blos deswegen merkwürdig zu seyn, weil die coëfficientes in einer so leichten Ordnung fortgehen.

Was ich in meinem vorigen von den lunulis geschrieben hatte, ist von Ew. vermuthlich übergangen worden, nicht weil es unrichtig, sondern weil es gar zu offenbar ist.

Da nach der angenommenen Bedeutung der signorum $\pm$ und $\mp$ diese Formul $\pm a \mp b$ entweder $a - b$ oder $-a + b$ heissen muss, so ist allerdings ein signum nützlich, welches ausser diesen beiden valoribus auch $a + b$ und $-a - b$ andeutet; dieses erinnere ich mich in einigen Büchern mit 8 ausgedruckt gesehen zu haben, und auf solche Weise halte ich dafür, dass man durch $8\, 1\, 8 \frac{1}{2}\, 8 \frac{1}{3}\, 8 \frac{1}{4}\, 8$ etc. alle quantitates rationales, surdas et a quibuscunque quadraturis pendentes exprimiren könne; die ganze Kunst bestehet nur darin, dass die signa $+$ et $-$ suis locis recht substituiret werden.

Weil aber doch das signum 8 nur alternative entweder $+$ oder $-$ bedeutet, so kann man noch ein signum, etwa $\div$ (welches der Stifelius vor $-$ zu gebrauchen pfleget) in diesem Verstande annehmen, dass es simul et $+$ et $-$ bedeute. So gibt es ex. gr. eine seriem numerorum n, der apparence nach valde irregularem, und die wohl noch von Niemanden consideriret seyn mag, von dieser Beschaffenheit $n \div p = P$, wo p und P numeros primos bedeuten, so dass, wenn $n - p$ ein numerus primus ist, ex natura numeri n auch $n + p$ ein numerus primus seyn muss; durch n aber werden folgende numeri angedeutet 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18, 24, 30, etc. Gleichwie nun alle numeri primi majores quam 3 unter die Formul $6m \pm 1$ gehören, so hat es das Ansehen, dass die termini dieser neuen seriei, welche grösser als 8 sind, in der Formul $6m$ begriffen seyen.

Die series numerorum 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, etc. deren quadrata, unitate aucta, numeri primi sind, scheinet diese proprietatem zu haben, dass eine jede Zahl aus zweyen der vorhergehenden bestehe, als $6 = 2 + 4$, $24 = 10 + 14$, $20 = 4 + 16$. Oftmals ist der terminus unico modo ex duobus praecedentibus compositus, als $74 = 20 + 54$.

Es ist unlängst bei einer gewissen Gelegenheit darüber raisonniret worden, ob die globi sanguinei, welche nach des Leuwenhoeks Observation, 6 zusammen einen globum majorem formiren, nicht ferner aus 6 kleinern, und diese wieder aus 6 kleineren, et sic in infinitum zusammengesetzt seyn könnten? Wenn aber 6 globi intra cavitatem globi majoris solchergestalt concipiret werden, dass sie sich einander so viel möglich berühren, so wird der diameter globi cujusvis minoris sich ad diametrum globi majoris, in quo continentur, verhalten wie 1 zu $1 + \sqrt{2}$, und wenn dieses auf die globos sanguineos, deren ein jeder für sich selbst nicht eigentlich ein globus, sondern ein aggregatum sex minorum globorum ist, appliciret wird, diese kleineren globuli aber, wie gemeldet, aus 6 noch kleineren etc. bestehen sollen, so findet es sich, dass man nothwendig bei einem gewissen gradu determinato mit solcher diminutione globorum aufhören muss; denn weil die soliditas omnium globorum ex ordine n ad soliditatem unius globi ex ordine primo ist wie $\frac{6^{n-1}}{(1+\sqrt{2})^{3n-3}}$ ad 1, so würde, wenn die subdivisio auf gleiche Art in infinitum fortginge, propter $n = \infty$, das aggregatum omnium istorum globorum respectu globi maximi infinite parvum seyn, folglich auch mit dem besten microscopio nicht gesehen werden können, welches der expérience zuwider läuft. Ich habe (Tit.) den Hn. von Bl.... *), mit welchem ich hierüber gesprochen, meo periculo versichert, dass es Ew. eben so finden würden, und bitte mir desfalls Dero sentiment hievon mit wenigem zu melden. Bei dem *meo periculo* fällt mir der Matanasius ein, davon ich unlängst die 6te Edition gelesen, nachdem ich das Buch in 18 Jahren nicht gesehen hatte. Die approbation générale, so es bey dem Publico gefunden, und davon der Autor selbst unterschiedene passages anführt, zeuget in der That von dessen mérite, und trifft hier gewissermaassen des Ciceronis Ausspruch ein: *Id ipsum est summi oratoris, summum oratorem populo videri.*

Ich habe mich nach einem Buch, so den Titul führet *Labyrinthus Algebrae*, Aut. Joh. Jac. Ferguson, Hagae

*) Blumentrost?

Com. 1667. 4. und ich selbst schon vor 30 Jahren in Händen gehabt (wiewohl nichts daraus behalten) bey unterschiedenen Personen vergeblich erkundigt. Dem Hn. Hermann, welcher doch eine grosse connoissance von dieser Art Büchern hatte, war es auch ganz unbekannt. Neulich fand ich ohngefähr obgedachten Titul in meinen excerptis, und dabey geschrieben, de quo tractatu indicium vide in Actis Anglicanis ad ann. 1669 mens. Jul. p. 202. Vielleicht ist etwas darin, so einige Attention meritiret.

Goldbach.

LETTRE XLVIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réponse. Continuation sur les mêmes sujets.

Berlin d. 27 October 1742.

Wenn Ew. eine solche Demonstration haben, dass $n^2 = 4pn - p - a^2$, worin nicht angenommen wird, dass $q(4p-1)$ keine summa duorum quadratorum seyn kann, so ist dieselbe höchst merkwürdig, indem daraus nicht nur diese Wahrheit, somdern noch viel andere weit leichter demonstrirt werden können. Ich muss inzwischen gestehen, dass ich aller angewandten Mühe ungeachtet keine andere Demonstration habe finden können. Hingegen sehe ich deutlich ein, dass $ee + ff + gg = 4e^2 f^2 p^2$; denn soll eine summa trium quadratorum einen numerum parem machen, so muss

entweder nur ein quadratum oder alle drey quadrata paria seyn. Im ersten Fall kommt ein numerus impariter par heraus, welcher folglich kein Quadrat seyn kann; dahero ist klar, dass alle drey quadrata paria seyn müssen. Es sey also $e = 2a$, $f = 2b$, $g = 2c$, so müsste $aa + bb + cc$ gleich seyn $16a^2 b^2 p^2$, und folglich müssten um so viel mehr a, b und c numeri pares seyn, und so fort in infinitum. Aus diesem Grunde folget also noch dieser generalere Satz, dass $a^2 + b^2 + c^2 = 4abn$. Si $fmn - m - n = a^2$, erit quoque positis mpp et npp pro m et n, $fmnp^4 - mpp - npp = \square$ und folglich $fmnpp - m - n = \square$. Damit aber die erste Aequation ihre Richtigkeit habe, so kann freylich der coëfficiens f praeter 4 unendlich viel andere valores haben, wie Ew. angemerket haben; wobei ich hierauf gefallen, dass si formulae $faa + 1$ nullus extat divisor formae $4fm - 1$, auch immer $4fmn - m - n = \square$. Weil nun nach den letztens überschriebenen Observationen, hujusmodi formula $faa + bb$ dividi nequit per numerum primum formae $4fm - 1$, so folget generaliter dass $4fmn - m - n =$ quadrato, welcher Universal-Satz sich vielleicht noch leichter demonstriren lässt, als ein casus particularis. Es käme also darauf an, dass man demonstrirte, dass $\frac{aa + m + n}{4mn}$ nimmermehr ein numerus integer seyn könne, oder dass $\frac{aa + p}{pp - qq}$, ubi p et q uterque vel numerus par vel impar esse debet, kein numerus integer seyn könne, oder dass $mpp - mqq - p$ kein quadratum seyn könne. — Bey Ueberschreibung der divisorum primorum formulae $pxx + yy$, welche alle in solchen formulis exprimirt werden können $4p + \alpha$, $4p + \beta$ etc., habe vergessen zu melden, dass ausser diesen, der binarius et ipse numerus p ejusve divisores

Platz finden, deren numerus determinatus ist, und in den vorigen formulis nicht begriffen sind, und folglich à part bemerkt werden müssen. Also sind alle divisores primi formae $7xx+yy$ entweder 2, oder 7, oder in diesen Formuln enthalten $14n+1$, $14n+9$, $14n+11$; und so oft $14n+1$, oder $14n+9$, oder $14n+11$ ein numerus primus ist, so hat derselbe selbst diese formam $7xx+yy$. Alle numeri trigonales aucti unitate $\frac{xx+x}{2}+1$ sind zwar nicht eigentlich in $7xx+yy$ enthalten, sondern in $\frac{7xx+yy}{4}$; und sind also alle numeri trigonales unitate aucti et quater sumti in dieser Form begriffen $7xx+yy$. Da nun das simplum keine andere divisores haben kann, als das quadruplum, so folget dem ungeacht, dass alle numeri primi, qui sunt divisores cujusque numeri trigonalis unitate aucti, in diesen Expressionen begriffen sind: 2, 7, $14n+1$, $14n+9$, $14n+11$, und dagegen wird keine Exception gefunden werden. Dass unsere expressiones pro $l2.l2$ nicht völlig übereinkommen, rührt ohne Zweifel daher, dass der $l2$ in beiden calculis nicht gleich accurat genommen worden. Ich erinnere mich nicht mehr auf wie viel Figuren ich den $l2$ genommen; ich habe solchen in meinen Schriften nur auf 16 Figuren aufgezeichnet; es ist aber noch accurater

$$l2 = 0{,}6931471805599453094172321$$

und nachdem ich die Multiplication nochmal gemacht, so finde ich $l2.l2 = 0{,}4804530139182014246671024$.

Das gemeldete theorema: Si

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

ist deswegen merkwürdig, weilen durch dasselbe sehr leicht die summa hujus seriei $1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.5}+\frac{1}{7.7}+\frac{1}{9.9}+$ etc. gefunden werden kann. Denn weilen ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

ponatur summa quadratorum horum terminorum

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = p,$$

et summa factorum ex binis terminis illius seriei

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}\right) = q, \text{ erit } p + 2q = \frac{\pi\pi}{16}.$$

Erit autem

$$\begin{aligned}
q = -\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{5.7} - \text{etc.} &= -\frac{1}{2}\,(1) \\
+\frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{5.9} + \text{etc.} &= +\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) \\
-\frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.9} - \frac{1}{5.11} - \text{etc.} &= -\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) \\
+\frac{1}{1.9} + \frac{1}{3.11} + \frac{1}{5.13} + \text{etc.} &= +\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right).
\end{aligned}$$

Es ist also

$$-q = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

Wenn nun in obiger serie genommen wird $a = -1$ und $n = 2$, und also gesetzt wird

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{\pi}{4}$$

erit $-q = \frac{ss}{2} = \frac{\pi\pi}{32}$. Dahero, weilen $p = \frac{\pi\pi}{16} - 2q$, so ist $p = \frac{2\pi\pi}{16} = \frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + $ etc. Und gleichergestalt kann dieses theorema bey andern Gelegenheiten ganz unerwartete nützliche Dienste leisten. Dass in meinem vorigen Ew. Einfall de lunulis nicht beantwortet habe, ist aus Versehen geschehen. Der Grund davon ist zwar ex similitudine figurarum leicht einzusehen, indessen können daraus doch solche curieuse Consequenzen gezogen werden, welche auf eine andere Art schwerlich bewiesen werden können.

Was für Zahlen für n angenommen werden können, dass wenn $n-p$ ein numerus primus ist, auch $n+p$ ein solcher werde, und dabei p einen numerum primum bedeute, kann meines Erachtens nicht generaliter angezeiget werden. Wenn aber für p eine determinirte Zahl angenommen wird, so können quovis casu series numerorum pro n gefunden werden; als, wenn $p=1$, so hat man für n diese Zahlen 2, 4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, etc., als welche Zahlen sive aucti sive minuti unitate numeros primos geben. Ist $p=2$, so kommt für n diese series 3, 5, 9, 15, 21, 39, 45, 69, 81, etc. Weil aber hier lauter numeri impares kommen, so sey $p=3$, und für alle valores von n kommt diese series 4, 8, 10, 14, 16, 20, 26, 34, 40, etc. Datur ergo unicus numerus 4 qui omnibus numeris primis (excepto 2) se minoribus sive auctus sive minutus producat numeros primos. Der grosse Vortheil, welchen uns die analysis bringt, kommt in der That nur von den signis her, welche man nach gewissen Grundsätzen zu tractiren pflegt, und dahero stehen noch sehr wichtige Erweiterungen zu vermuthen, wenn man neue signa introduciren sollte. Die Hauptsach aber wird auch auf die Erfindung der Regeln ankommen, nach welchen man dieselben signa tractiren muss. Der Newton in Arithmetica universali hat die signa dubia nur durch puncta angedeutet, und kann deswegen, weil dadurch die Multiplication angedeutet zu werden pflegt,

nicht imitirt werden. — Ew. Reflexion über die compositionem globulorum sanguineorum hat ihre völlige Richtigkeit; dergestalt, dass wenn eine similis compositio in infinitum fortginge, die quantitas materiae völlig evanescirte. Es sey A das volumen eines globi sanguinei, welches zugleich die quantitatem materiae, oder sein Gewicht, anzeigen würde, wenn der globus solid oder massiv wäre. Ist aber derselbe aus 6 globulis zusammengesetzt, welche alle solid sind, so ist die quantitas materiae nur $=\frac{6A}{(1+\sqrt{2})^3}=\frac{6A}{7+5\sqrt{2}}$ $=0{,}4264068706\,A$, das ist, die quantitas materiae in einem solchen globulo sanguineo contentae wird beinahe $\frac{14}{6}$ mal kleiner seyn, als wenn derselbe solid wäre. Sollten diese 6 globuli wiederum aus 6 noch kleinern zusammengesetzt seyn, so würde die quantitas materiae, und folglich das pondus $\frac{14}{6}\cdot\frac{14}{6}$ d. i. $\frac{196}{36}$ oder 5 mal geringer und auf solche Art bald imperceptibel werden. Da nun aber doch ein jeder globulus sanguineus ein Gewicht hat, so ist klar, dass diese Art der Zusammensetzung nicht weit fortgehet und nicht einmal sich über die dritte Ordnung erstreckt. Denn sollte ein jeder von diesen globulis wiederum aus 6 andern bestehen, wenn auch diese so schwer als Gold angenommen würden, so könnte doch das wirkliche Gewicht nicht herauskommen. Um dieses deutlicher einzusehen, so sey die gravitas specifica materiae, ex qua globuli non amplius compositi constant, $=n$. Wenn also die globuli sanguinei selbst solid wären und aus dieser Materie beständen, so würde ihre gravitas specifica gleich seyn $n=1{,}0000000\,n$ wären aber die globuli II ord. solid, so ist

die gravitas specifica .... $=0{,}4264068\,n$

sind erst die globuli III ord. solid, so ist die gravitas specifica .... $= 0{,}1818228 \, . n$
sind die globuli IV ord. solid, so ist die gravitas specifica .... $= 0{,}0775305 \, . n$
sind die globuli V ord. solid, so ist die gravitas specifica .... $= 0{,}0330595 \, . n$
Wenn also die gravitas specifica ultimae materiae sanguinem constituentis so schwer wäre als Gold, und erst die globuli V^ti ordinis solid wären, so würde doch die gravitas specifica sanguinis schon 30 Mal kleiner seyn, als des Golds, und also fast um die Hälfte leichter als Wasser. Da nun die gravitas specifica sanguinis nicht kleiner ist als des Wassers, und die ultima materia bey weitem nicht so schwer als Gold angenommen werden kann, so ist ganz klar, dass dieser modus compositionis cujusque globuli ex sex minoribus sich unmöglich ultra III^um ordinem erstrecken könne.

Bey dem obgedachten theoremate, dass $4nab - a - b$ nimmer ein numerus quadratus seyn könne, oder dass $\frac{pp + a + b}{ab}$ kein numerus integer per quaternarium divisibilis sey, habe ich zwar gesehen, dass $\frac{pp + a + b}{ab}$ infinitis casibus ein numerus integer werden kann; derselbe ist aber allezeit entweder impar oder doch impariter par; infinitis autem valoribus pro a et b assumtis, kann $\frac{pp + a + b}{ab}$ nicht einmal ein numerus integer werden. Sit $a = 1$, $b = 1$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = pp + 2$ und also entweder impar oder impariter par. Sit $a = 1$, $b = 2$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 3}{2}$: (2, 6, 14, 26, etc.) nehmlich allezeit impariter par. Sit $a = 1$, $b = 3$, erit

$\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 4}{3}$, welche Formul nimmer ein numerus integer seyn kann. Sit $a = 1$, $b = 4$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 5}{4}$; diese kann auch nimmer ein numerus integer werden. Sit $a = 1$, $b = 5$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 6}{5}$: (2, 3, 11, 14, 30, etc.) entweder impar oder impariter par. Sit $a = 2$, $b = 2$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 4}{4}$: (1, 2, 5, 10, 17, 26, etc.) welche numeri entweder impares oder impariter pares. Sit $a = 2$, $b = 3$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 5}{6}$: (1, 5, 9, 21, etc.), alle impares. Sit $a = 2$, $b = 4$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 6}{8}$, also muss seyn $p = 2q$ und $\frac{2qq + 3}{4} =$ int., welches unmöglich. Sit $a = 2$, $b = 5$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 7}{10}$, welche Formul kein numerus integer seyn kann. Sit $a = 2$, $b = 6$, erit $\frac{pp + a + b}{ab} = \frac{pp + 8}{12}$: (1, 2, 6, 9, 17, 22, etc.) wo kein multiplum quaternarii vorkommt. Wenn man vielleicht diese casus weiter continuiret und wohl erwägt, so könnte man den wahren Grund finden, warum $\frac{pp + a + b}{ab}$ niemals ein numerus integer per 4 divisibilis werden kann. Es scheinen auch aus der Form $\frac{pp + a + b}{ab}$ ausser den multiplis quaternarii noch andere Zahlen ausgeschlossen zu seyn, als z. Ex. 7, denn ich habe noch keine valores pro a, b et p finden können, ut $\frac{pp + a + b}{ab}$ fieret $= 7$, dem ungeachtet aber können multipla von 7, als 14, 21, etc. herauskommen Es scheinen also in dergleichen Speculationen noch grosse

Geheimnisse verborgen zu liegen, wovon dem Fermatio einige wichtige bekannt gewesen seyn mögen, deren Verlust um so viel mehr zu bedauern ist. Ich habe an Mr. Clairaut geschrieben, ob die Manuscripte von Fermat noch zu finden wären. Da aber der goût für dergleichen Sachen bei den Meisten erloschen ist, so ist auch die Hoffnung verschwunden . . . .

Der Herr Brigadier Baudan ist hier noch ausser Dienst und hat sich mit einer Mlle. Mirabel verheirathet, die ein artiges Haus besitzt, welches ich für 2000 Rthlr. gekauft und dazu von Ihro Königl. Majestät das Privilegium eines Freyhauses erhalten habe. Dasselbe liegt zwischen der Friedrichs- und Dorotheen-Stadt, nahe bey dem Ort, wo I. M. der König das neue Schloss und die Akademie zu bauen beschlossen hat; dass also die Situation nicht erwünschter seyn könnte.

Euler.

LETTRE XLIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Affaires de l'Académie de St.-Pétersb. Oeuvres de Jean Bernoulli. Correspondance avec Nic. Bernoulli. Nouveau volume des *Miscellanea Berolinensia*.

Berlin d. 15 Dec. 1742.

— — Der Zustand der Akademie in Petersburg gehet mir wegen des Hn. Raths Schumacher sehr zu Herzen; am meisten aber ist der H. Bernoulli darüber allarmirt, weilen er befürchtet seine bisher genossene Gage zu verlieren. Es werden anjetzo des alten Hn. Bernoulli Schriften, so noch nicht publicirt worden, in Genève gedruckt. Dieses Werk soll unserm König dedicirt werden und der Verleger will selbst herkommen solches zu praesentiren. Mit demselben werde ich bei dieser Gelegenheit einen Accord wegen meiner Scientia navali zu treffen suchen, welches vermuthlich die Akademie nicht übernehmen wird. — —