CORRESPONDANCE

ENTRE

LÉONARD EULER

ET

CHR. GOLDBACH.

1729 — 1763.

Correspondance mathématique et physique Tome I, page 3.

Fac-similé de l'écriture latine de L. Euler

De Communicatione Motus in Collisione corporum tam Elasticorum quam Mollium et Durorum.

Experientia constat, corporibus in se mutuo impin,
gentibus, eorum statum vel motus vel quietis im,
mutari. Cum autem omnis motus in corpore oriatur
vel mutetur a potentia in id agente, dubium
non est, quin hac motus ex impulsu mutuo, immu,
tatio, a potentia quadam ibi agente producatur. Quod
corpora in se mutuo incurrentia, vim patiantur, cla,
re elucescit ex collisione corporum mollium cera
luto, etc:, quae impressiones inde acquirunt. Id qui
dem in elasticis non apparet, quia ea se restituunt
in priorem statum. Cum ergo corpora in se mutuo
impingunt, sibi mutuo impressiones inducunt, eaeque
vel restituuntur ut in elasticis, vel manent ut in
mollibus, unde duae leges motus communicationis
oriuntur, una pro corporibus elasticis altera pro
mollibus, quorsum etiam perfecte dura,

Lith. par Davignon.

Correspondance mathématique et physique Tome I, page 3.

LETTRE I.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Interpolation des séries à loi variable. Première application des calculs différentiel et intégral à la doctrine des séries.

Vir Celeberrime.

Petropoli d. 13 Octobr. A. 1729.

Cum nuper in nonnulla incidissem, quae ad interpolandas series, legem, uti appellare soles, variabilem habentes, facere visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa, quae huc attinent, detexi. Quae, quia Tibi, Vir Celeberrime, placitura esse mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque submittere judicio statui. Hujus seriei 1, 2, 6, 24, 120, etc., quam a Te multum tractatam esse vidi, hunc inveni terminum generalem

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\text{ etc.}$$

ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine m^{mum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et aeque si m est numerus integer, tantum ad verum magis

*

magisque accedit, ac si m fuerit fractus. Sed tamen per eum admodum prope quemque terminum invenire licet, idque eo facilius, quo minus assumatur m. Si autem aliquot solum, uti visum sit, factoribus, termino generali commodior induci potest forma: ut si duobus prioribus factoribus contenti esse velimus, habebitur $\frac{1 . 2}{(1+m)(2+m)} 3^m$ pro termino ordine m. Sin autem generaliter n factores capiantur, sequentibus reliquis neglectis, erit terminus generalis $\frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{(1+m)(2+m) \ldots (n+m)}(n+1)^m$, qui, quo major accipitur numerus n, eo propius ad verum accedet. Communicavi haec cum Clar. Bernoulli, qui peculiari modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a meo diversum, quod aliam potestatem loco $(n+1)^m$ adhibeat, in qua determinanda fortasse factorum neglectorum rationem habuit. Credo ipsum Tibi nuper inde deductum numerum termino seriei, cujus index est $1\frac{1}{2}$, proximum misisse. Potest hic terminus generalis praeterea alium habere usum in inveniendis factis ex infinito factorum numero constantibus, quae sint aequalia numero finito: ut posito $m = 2$, habebitur factum $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{36}{35}$ etc. quod aequale est 2. Similiter posito m 3, erit $\frac{8}{4} \cdot \frac{27}{20} \cdot \frac{64}{54} \cdot \frac{125}{112}$ etc. $= 6$. Terminum hunc generalem ex eo inveni fundamento, quod haec series 1, 2, 6, 24, etc. in infinitum continuata tandem evadit geometrica. Et hujusmodi terminos generales etiam pro aliis seriebus, quae in infinitum cum geometricis confunduntur, exhibere in promtu est. Sed cum hoc modo termini intermedii non nisi veris proximi inveniantur, omissa hac serierum tractandarum ratione, aliter in hac re versari coepi, in id intentus, ut terminos intermedios non tantum veris proximos, sed ipsos veros, si fieri posset, invenirem. Ad id

vero inveniendum, cum seriei terminum generalem haberi oportere visum sit, quem vero peculiarem et ab adhuc usitatis longe diversam habiturum formam praevidi. Obtulit se igitur nova quaedam terminorum generalium forma, quae quidem ad omnes prorsus series potest accomodari jam cognitas, sed longe ea latius patet, quippe infinitarum serierum legem variabilem habentium, quarumque adhuc methodis consuetis nulli termini generales inveniri potuerunt, determinare possum terminos generales. Hi autem sunt ejusmodi, ut termini quivis, sive eorum exponentes sint numeri integri sive fracti, inde exacte inveniri queant, quatenus scilicet rei natura permittit. Evenire enim solet, ut inventio terminorum intermediorum a quadratura circuli pendeat, vel a logarithmis, vel alius cujuspiam curvae quadratura. Neque vero termini generales, qui adhuc in usu fuerunt, hisce de quibus loquor, praestant, verum utriusque generis aeque facilis est usus. Pro hac quidem serie $\overset{1}{1} . \overset{2}{2} . \overset{3}{6} . \overset{4}{24} . \overset{5}{120}$ etc. terminum generalem nondum inveni, sed pro innumerabilibus aliis similibus; unde id tamen assecutus sum, ut terminos intermedios, quorum exponentes sunt $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. reipsa possim determinare. Terminus autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{-1} \,.\, l - 1)}$, seu quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo, cujus diameter $= 1$. Ex quo perspicuum est, naturam rei non permittere, ut is numeris exprimatur. Sed ex ratione radii ad peripheriam quasi data, terminum, cujus exponens est $\frac{1}{2}$, inveni hunc 0,8862269. Qui si multiplicetur per $\frac{3}{2}$, habebitur terminus cujus exponens $\frac{3}{2}$, hic 1,3293403. Porro hic ductus in $\frac{5}{2}$ dabit terminum cujus exponens est $\frac{5}{2}$ et ita porro. Possum etiam dare eos terminos, quorum exponentes sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ etc. Tum ex his, quorum exponentes sunt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ etc. Sed horum determinatio ab altioribus pendet quadraturis. Ex regula principio data quaesivi quoque terminum exponentis $\frac{1}{2}$, et sumendis 15 factoribus eum inveni 0,8932, qui aliquanto major est vero. Serierum jam, quarum habeo terminos generales, quasdam hic apponam, quo judicare possis, Vir Celeberrime, quam late pateat mea methodus. Primum hujus seriei: $\overset{1}{\frac{2}{3}}$, $\overset{2}{\frac{2.4}{3.5}}$, $\overset{3}{\frac{2.4.6}{3.5.7}}$, $\overset{4}{\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}}$ etc. inventum habeo terminum generalem, ex quo terminos exponentium $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. inveni utique sequuntur. Significet $p:d$ rationem peripheriae ad diametrum, quo posito erit $\overset{\frac{1}{2}}{\frac{1.p}{2.2d}}$, $\overset{1\frac{1}{2}}{\frac{1.3.p}{2.4.2d}}$, $\overset{2\frac{1}{2}}{\frac{1.3.5.p}{2.4.6.2d}}$ etc. Aliae series, quarum terminos generales reperi, sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{2.4}{3.5}$, $\frac{3.6.9}{4.7.10}$, $\frac{4.8.12.16}{5.9.13.17}$, $\frac{5.10.15.20.25}{6.11.16.21.26}$ etc. et $\frac{1}{2}$, $\frac{1.2}{3.4}$, $\frac{1.2.3}{4.5.6}$, $\frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}$ etc. nec non 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{50}{24}$, $\frac{274}{120}$, $\frac{1764}{720}$ etc. Harum duae priores quam teneant legem, ex inspectione intelligetur, tertia vero, cujus lex minus clare apparet, est summatoria progressionis harmonicae 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. Ex ejus, quem habeo, termino generali, inveni terminum cujus index est $-\frac{1}{2}$ hunc $-2\,l2$. Terminus vero cujus exponens $\frac{1}{2}$, est $2-2l2$. Is cujus exponens $1\frac{1}{2}$, est $2+\frac{2}{3}-2l2$, tum ille cujus exponens $2\frac{1}{2}$, est $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2$, et ita porro. Significet

vero $l2$ logarithmum hyperbolicum binarii qui est $=$ 0,69314718056. Quae cum ita se habeant, ut termini generales tot quadraturas comprehendere debeant, intelligitur eorum inventionem a calculo infinitesimali peti oportere. Id ergo hac in re praestiti, ut calculum differentialem et integralem seriebus tractandis accomodaverim. Quem usum novum, etsi ob temporis brevitatem nondum magis excolere potui, spero adhuc ampliorem fore. Tu igitur, Vir Celeberrime, qui hanc de seriebus doctrinam jam tot tantisque inventis auxisti, judicabis, quid a novo hoc circa series versandi modo amplius expectandum sit. Maxima vero certe utilitas atque perfectio acquiretur, si Ipse, quomodo quam commodissime calculo differentiali hac in re uti conveniat, inquirere dignaberis. Hoc enim adhuc mea methodus laborat incommodo, quod id non invenire possim, quod volo, sed id velle debeam, quod invenio.

Vale et fave Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE II.

GOLDBACH à EULER.

═

SOMMAIRE. Démonstration des termes généraux des suites de la lettre précédente. Ce que c'est que les logarithmes hyperboliques? Théorème de Fermat.

Vir Clarissime, Moscuae 1 Decembr. 1729.

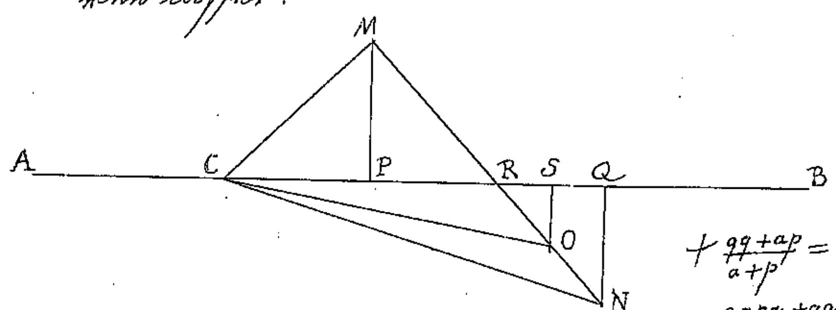
Ad epistolam Tuam, quae mihi gratissima fuit, generatim respondeo me in terminis mediis serierum inveniendis satis habuisse, si quos in numeros rationales cogere non possem, eosdem per series infinitas numerorum rationalium utcunque exprimerem, quodsi deinde ostendi possit seriem hujusmodi, qua valor termini medii quaesiti continetur, vel ad numeros irrationales vel ad logarithmos, vel denique ad curvarum quadraturas nondum inventas pertinere, id minime contemnendum puto, nam si alii operam dederunt ut incognitam rationem diametri ad circulum per seriem infinitam determinarent, e contrario summam seriei nondum cognitam per quadraturam circuli explicare licebit, hac tamen notabili dif-

Correspondance mathématique et physique. Tome I, pag. 8

Correspondance mathématique et physique Tome I, pag. 8

Fac-similé de l'écriture de Chr. Goldbach 1746.

P. S. Es ist mir gestern eingefallen daß sich das Problema catoptricum auf folgende weise solviren läßt:



$$+\ \frac{qq+ap}{a+p} = \frac{av-qq}{a-v}$$

$$qq = \frac{2apv+aav-aap}{2a-v+p}$$

Sit AB. axis curvae $= a$; punctum radians C. Sint CM. et CN. radii in curvam incidentes; MR. et NR. radii ad idem punctum axis R. reflexi; capiatur in MN. punctum O. ita ut sint $CM+MO = CN+NO = a$, et ponatur recta $CO = q$. ($CM = \frac{a-p}{2}$. $MO = \frac{a+p}{2}$. $CN = \frac{a+v}{2}$. $NO = \frac{a-v}{2}$) ubi v. iam datur per p. et q. est enim

$+\ v = \frac{(2a+p)q^2 + a^2p}{a^2+2ap+q^2}$) ponatur porro $RO = z$, $RS = uz$, invenietur spatium quod inter radium incidentem et reflexum in axe intercipitur

$$CR = CS - RS = \sqrt{q^2 - z^2(1-u^2)} - uz = CQ - RQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+v)^2 - (a-v+2z)^2(1-u^2)} - \frac{(a-v+2z)u}{2} = CP + PR = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-p)^2 - (a+p-2z)^2(1-u^2)} + \frac{(a+p-2z)u}{2}.$$

Lith. par Davignon.

ferentia, quod numeros irrationales ad rationales redigi non posse facile demonstretur, quadraturam vero circuli numeris rationalibus definiri non posse nemo, quod sciam, evicerit.

Terminum generalem seriei $1 + 2 + 6 + 24 +$ etc, quem pro exponente quocunque m facis

$$\frac{1 . 2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m} . 3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m} . 4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m}\, 5^m}{4+m} \cdot \text{ etc.}$$

sic demonstro: Sit x exponens factoris cujuscunque, erit formula generalis factorum $\frac{x^{1-m} . (x+1)^m}{x+m}$, et productum omnium factorum a primo usque ad ultimum cujus exponens est x, inclusive, $(x+1)^m : \left(\frac{(x+1)}{1} . \frac{(x+2)}{2} . \frac{(x+3)}{3} \ldots \frac{(x+m)}{m}\right)$. Ex. gratia si $m = 2$, fiet productum factorum ad datum quemcunque factorem (cujus exponens est x) $\frac{2(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{2(x+1)}{x+2}$, adeoque productum omnium in infinitum $= 2$. Si $m = 3$, erit simile productum ad datum quemcunque factorem $6\,(x+1)^3 : \left(\frac{x+1}{1}\right)\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x+3}{3}\right)$ adeoque productum omnium in infinitum $= 6$, et sic porro. Sed observasti sine dubio series algebraicas omnes, quarum termini consueto more per signum $+$ conjungi solent, etiam in hujusmodi factores converti posse, erunt enim hic producta factorum, quae illic sunt aggregata terminorum.

Fateor me non satis perspectam habere naturam logarithmorum hyperbolicorum, quin et Cl. Wolfius, ubi de logarithmis agit, hyperbolicorum mentionem nullam facit.

In reliquarum serierum, quas commemoras, terminis generalibus, Tuo more per factores exprimendis non magnam video difficultatem, nam seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{3.6.9}{4.7.10} + \frac{4.8.12.16}{5.9.13.17} + \text{etc.}$$

terminus generalis est $\frac{x}{x+1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdot\frac{3x}{3x+1}\cdots\frac{mx}{mx+1}$ donec m fiat $= x$, quod si nusquam contingat, erunt factores numero infiniti; sic terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ fit $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot$ etc.

Seriei $\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}+\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}+$ etc. terminus generalis est

$$\frac{2(2n+3)}{3(2n+2)}\cdot\frac{4(2n+5)}{5(2n+4)}\cdot\frac{6(2n+7)}{7(2n+6)}\cdot\frac{8(2n+9)}{9(2n+8)}\cdot \text{etc.}$$

Seriei $\frac{1}{2}+\frac{1.2}{3.4}+\frac{1.2.3}{4.5.6}+\frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}+$ etc. terminus generalis est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2(4n+2)}{6(n+1)}\cdot\frac{3(4n+6)}{10(n+2)}\cdot\frac{4(4n+10)}{14(n+3)}\cdot\frac{5(4n+14)}{18(n+4)}\cdot \text{etc.}\right)$$

neque adeo difficile est assumere numeros quadraturam circuli exprimentes, aliunde jam cognitos et pro iisdem series concinnare, quarum terminos medios hi numeri constituant, cujus artificii mihi probe gnarus videris.

Caeterum egregias plane judico methodos, quarum specimina mecum communicasti, neque dubito quin iisdem vestigiis progrediens multa nova et praeclara in hoc genere reperturus sis; nisi ego quoque nuper ad Cl. Bernoullium nostrum theorema, quo methodum summandi series ad calculum quem vocant integralem accomodavi. Vale.

Goldbach.

P. S. Notane Tibi est Fermatii observatio omnes numeros hujus formulae $2^{2^{x-1}}+1$, nempe 3, 5, 17, etc. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse, et post eum nemo, quod sciam, demonstravit.

LETTRE III.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Usage du calcul intégral dans la recherche des termes généraux des suites. Digression sur la théorie des logarithmes et les logarithmes hyperboliques. Sur le théorème de Fermat de la lettre précédente.

Vir Celeberrime,

Petropoli d. 8 Januar 1750.

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio, maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6+24+$ etc. exhibente, quam Tibi, Vir Celeberrime, perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari diffidens id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire possem, quae non seriebus dignoscendis contineatur. In aliam igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis generalibus denotandarum. Ea in hoc consistit, ut formulas integrales in terminos generales recipiam. Ad hoc autem adductus sum considerans ad ea, quae a communi algebra perfici non possent, analysin infinitorum plerumque facilem praebere aditum. Sed termini hujusmodi generales toties consuetam induunt formam, quoties formulae illae integrales algebraice exprimi possunt, quibus in casibus progressionis omnes termini, sive exponentes sint numeri fracti, sive integri, algebraice exhibentur. Quando vero illae formulae integrationem universaliter non admittunt, omnes termini algebraice exponi nequeunt, sed quidam a quadraturis curvarum pendebunt, quae inde cognoscuntur. Cum igitur in nonnullis seriebus observassem terminos quosdam medios a quadratura circuli pendere, in earum terminis generalibus necessario formulae integrales inesse debere visae sunt. Sequenti autem modo hujusmodi formulis integralibus utor. Quando dico seriei cujuspiam terminum generalem esse $\int P\,dx$, intelligi oportet ex eo terminum quemcunque indicis n inveniri posse. Indicat vero hic P functionem quandam ex x et constantibus quantitatibus una cum n indice compositam; refero scilicet n ad constantes, ut unica variabilis x adsit. Jam $\int P\,dx$ hoc modo dat terminum n^{mum}. Integretur $\int P\,dx$ vel reipsa, si fieri potest, vel ad quadraturam curvae convenientis referatur; tanta autem constans adjiciatur, ut totum evanescat posito $x = 0$. Deinde ponatur $x =$ constanti cuidam quantitati (in sequentibus semper pono $x = 1$), habebitur functio quaedam quantitatum constantium et indicis n, quae erit ipse terminus n^{mus}. Fieri nunc potest, praecipue si n in exponentes

ingrediatur, ut positis loco n certis numeris, formula integrari possit, secus vero si alii substituantur. Quo fit, ut alii termini algebraice seu in numeris exprimi queunt, alii a quadraturis pendeant. Ut terminum generalem reperi hunc $\frac{2n+3}{2}\int dx(1-x)^n \sqrt{x}$ progressionis istius $\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} +$ etc. Qui quomodo congruat, ut appareat, sit $n = 2$, habebitur $\frac{7}{2}\int dx\,(1-x)^2\sqrt{x} = \frac{7}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}}$; ponatur $x = 1$, orietur terminus secundus $= \frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$. Idem hic terminus generalis omnes terminos medios suppeditat, ut sit $n = \frac{1}{2}$, erit $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ terminus quaesitus. Sed $2\int dx\sqrt{(x-xx)}$ exhibet segmentum circuli, cujus sagitta est x, radio existente $\frac{1}{2}$, seu diametro 1. Ponatur $x = 1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2}$ aequalis areae circuli, cujus diameter $= 1$. Similiter alii termini medii determinantur. Hujusmodi terminos generales omnium earum progressionum, quarum mentionem feci, aliarumque infinitarum similium dare possum. Quousque autem haec methodus pateat ut possis cognoscere, Vir Celeberrime, generaliora hic adjungo. Fundamenti loco mihi fere fuit haec progressio $1 + 1.2 + 1.2.3 +$ etc., cujus terminus generalis mihi inventus est $\int dx(-lx)^n$. Nimirum sumto integrali positoque $x = 1$, prodit terminus cujus index est $\frac{1}{2}$. Denotat autem lx logarithmum hyperbolicum ipsius x. Antequam vero ostendam, quomodo haec formula progressioni satisfaciat, explicabo, quod Te non satis perspicere innuis, quo differant logarithmi hyperbolici ab ordinariis. Si constituatur progressio geometrica

$$A\,..\,1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5,\quad \text{etc.}$$

eique subscribatur arithmetica

$$B\,..\,b,\ b+c,\ b+2c,\ b+3c,\ b+4c,\ b+5c,\ \text{etc.}$$

habebit quilibet terminus progressionis A sive eorum qui adsunt, sive interpolatorum respondentem in progressione B. Hi termini progressionis B respondentium terminorum in progressione A vocantur logarithmi. Jam cum innumerabiles progressiones arithmeticae subscribi possint, perspicuum est innumerabilia dari systemata logarithmorum. In vulgari systemate, quorum tabulae a Briggio et Vlacquio computatae habentur, loco seriei geometricae A posuerunt $1, 10, 100, 1000$ etc. et loco arithmeticae sumserunt hanc $0, 1, 2, 3, 4$ etc. ita ut logarithmus unitatis sit 0, denarii 1 etc. Ex hoc intelligitur, ad systema quodpiam logarithmorum condendum, duorum quorundam numerorum logarithmos pro lubitu accipi posse, e quibus deinde omnium numerorum logarithmi determinantur. Ita in systemate logarithmorum hyperbolicorum etiam pro logarithmo unitatis ponitur 0, et pro numero qui unitatem quantitate infinite parva superat, ut $1+dz$ assumitur logarithmus hoc ipsum dz. Vel series A est

$$1,\ (1+dz),\ (1+dz)^2,\ (1+dz)^3\ \text{etc.}$$

et series B logarithmos continens est

$$0,\quad dz,\quad 2dz,\quad 3dz\quad \text{etc.}$$

Logarithmi ex hac positione deducti sunt ii qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint, ac illi qui ex quadratura hyperbolae eruuntur. In hoc systemate est logarithmus binarii 0,693147180559945 et logarithmus denarii est 2,302585092994045 ut ipse calculo aliquoties repetito inveni. Sin autem acciderit, ut logarithmis hyperbolicis uti oporteat,

non quidem necesse est tabulam eorum ad manus habere, sed Vlacquiani in usum vocari possunt dummodo singuli logarithmi per 2,302585 etc. multiplicentur. Semper autem, quando in calculo infinitesimali de logarithmis sermo est, hyperbolici intelliguntur. Et hanc ob rem in termino generali $\int dx(-lx)^n$, l designat logarithmum hyperbolicum. Ut nunc appareat, quomodo haec formula quemvis terminum praebeat, sit $n=3$, habebitur $\int dx(-lx)^3 = -x(lx)^3 + 3x(lx)^2 - 6xlx + 6x$; constantis additione opus non est. Ponatur ergo $x=1$: proveniet terminus tertius $=6$. Omnes enim termini in quibus est lx evanescent, quia $l1=0$. Simili modo omnes termini numeros integros habentes eruuntur. Sed qui valor sit eorum, quorum indices sunt numeri fracti, id difficilius eruitur. Deducit enim ad quadraturas curvarum transcendentium, ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ determinatur a quadratura curvae, ad quam est $yy+lx=0$, cum tamen eundem ante a quadratura circuli pendere deprehenderim. Verum tamen alia mihi insuper est methodus eosdem terminos ad curvarum algebraicarum quadraturas reducendi, quae hoc theoremate continetur: Terminus, cujus index est $p:q$, aequalis est

$$\sqrt[q]{(1.2.3\ldots p)\left[\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\cdots\left(\frac{qp}{q}+1\right)\right]\cdot\left[\left(\int dx\,(x-xx)^{\frac{p}{q}}\right)\left(\int dx\,(xx-x^3)^{\frac{p}{q}}\right)\cdots\left(\int dx\,(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}\right)\right]}$$

quae expressio aequivalet huic $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$. Ponatur ex. gr. $p=1$ et $q=2$ ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ inveniatur, abibit forma generalis in $\sqrt[2]{1.2\int dx\sqrt{(x-xx)}}$; sed jam ostensum est $2\int dx\sqrt{(x - xx)}$ dare aream circuli diametri 1, quare in serie $1 + 1 \cdot 2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 +$ etc. terminus cujus index est $\frac{1}{2}$ aequalis est radici quadratae ex circulo cujus diameter est 1. Cum igitur $\int dx(-lx)^n$ sit terminus generalis, seu terminus ordine n hujus seriei, habeo $\int dx(-lx)^n = 1.2.3...n$, quod in serierum hanc includentium terminis generalibus inveniendis magni est momenti. Nec minus hoc

$m.\overline{m+1}.\overline{m+2}...\overline{m+n} = \frac{\int dx(-lx)^{m+n}}{\int dx(-lx)^{m-1}}$. Maxime universale et latissime patens est hoc theorema

$$(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng) = \frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{f:g}dx(1-x)^n}$$

unde facile fluit hoc:

$$\frac{(f+g)(f+2g)\ldots.(f+ng)}{(h+k)(h+2k)\ldots.(h+nk)} = \frac{g^{n+1}(h+(n+1)k)\int x^{h:k}dx(1-x)^n}{k^{n+1}(f+(n+1)g)\int x^{f:g}dx(1-x)^n}$$

Ex hoc theoremate facile est invenire omnium hujusmodi serierum, quarum termini sunt facta, in quae ingrediuntur quantitates in arithmetica progressione progredientes, terminos generales. Ut proposita sit haec progressio, de qua nuper mentionem feci, $\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{3.6.9}{4.7.10} +$ etc.

Hujus terminus ordine n est

$$\frac{n.2n.3n\ldots nn}{(n+1)(2n+1)(3n+1)\ldots(nn+1)}.$$

Hunc comparo cum

$$\frac{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)}{(h+k)(h+2k)(h+3k)\ldots(h+nk)}$$

quae formula ut in illam transmutetur, oportet sit $f=0$, $g=n$ et $h=1$, $k=n$. His valoribus substitutis prodit

$$\frac{n.2n.3n\ldots.nn}{(n+1)(2n+1)(3n+1)\ldots.(nn+1)} = \frac{(1+n+nn)\int x^{\frac{1}{n}}dx(1-x)^n}{(nn+n)d\int x(1-x)^n}$$

id quod est terminus generalis progressionis propositae. Est autem $dx(1-x)^n$ integrabile, integrale enim est $C - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. Constans C debet esse $= \frac{1}{n+1}$, ut posito $x=0$, totum evanescat. Ponatur nunc $x=1$, ut principio monui, prodibit C seu $\frac{1}{n+1}$, est igitur $(nn+n)\int dx(1-x)^n = n$, et ideo terminus generalis seriei propositae hanc habet formam

$$\left(\frac{1+n+nn}{n}\right)\int x^{\frac{1}{n}}dx(1-x)^n.$$

Sit $n = 3$, ut terminus tertius $\frac{3.6.9}{4.7.10}$ prodeat; habebitur

$$\frac{13}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx(1-x)^3 = \frac{13}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{39}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{39}{10}x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{13}{3}},$$

ponatur $x=1$, habebitur $\frac{13}{4} - \frac{39}{7} + \frac{39}{10} - 1 = \frac{162}{280} =$ termino tertio. Quaero terminum ordine $\frac{1}{2}$; fiat ergo $n = \frac{1}{2}$, habebitur

$$\frac{7}{2}\int xx\,dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = C - \frac{3}{7}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{14}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - (1-x)^{\frac{7}{2}}.$$

Ergo C est $= \frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1$. Ponatur $x=1$, restabit solum C, seu $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$. Algebraice ergo hic terminus ordine $\frac{1}{2}$ dari potest, nec non ii, quorum indices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. omnes numeris exprimi possunt; qui autem quanti sint, alio modo vix fortasse inveniri posset. Hic autem observo hunc terminum ordine $\frac{1}{2}$ aequalem esse termino ordine 2, et generaliter terminus ordine $\frac{1}{n}$ aequalis est termino ordine n. Haec fere constituunt unum genus progressionum, ad quod mea methodus deduxit; multa quoque ejus ope in seriebus summandis detexi, et praecipue terminis summatoriis inveniendis omnium earum progressionum, in quarum terminis generalibus exponens vel index in denominatorem ingreditur, ut in progressione harmonica. Sed de his alio tempore, si placuerit, scripturus sum.

Nihil prorsus invenire potui, quod ad Fermatianam observationem spectaret. Sed nondum prorsus persuasus sum, quomodo sola inductione id inferre legitime potuerit, cum certus sim ipsum numeris in formula 2^{2^x} loco x substituendis nec ad senarium quidem pervenisse. — Haec igitur benevole accipias enixe rogo et favere pergas, Vir Celeberrime, Tibi obstrictissimo

Eulero.

LETTRE IV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur la méthode d'Euler pour trouver les termes généraux des suites. Sur le théorème de Fermat.

Moscuae 22 Maii 1730.

Egregia Teque auctore digna judico quae secundis litteris mecum de terminis generalibus serierum communicasti; hoc tantum in methodo Tua cavendum mihi videtur, ne assumta integralis $\int P\,dx$ utrovis modo, hoc est, tam posita $x = 0$, quam posita $x = 1$, in nihilum abeat. Deinde sponte moneo, terminum generalem seriei $\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{3.6.9}{4.7.10} +$ etc., quem pro exponentibus non integris dederam, non quadrare, fatendum tamen est terminum generalem ejusmodi

$$\frac{2n+3}{2}\int dx\,(1-x)^n\sqrt{x},$$

ut intelligibilis fiat in seriem infinitam consueto more resolvi

*

debere, cujus singuli termini integrati tandem exhibebunt terminum generalem indefinitum, quem etiam sine usu arithmeticae differentialis infinitis modis produci posse constat.

Quod ad Fermatii observationem attinet, Tecum sentio, non credibile videri, eum ad sex terminos illius suae seriei exprimendos progressum fuisse, neque tanto labore opus est ad verisimilitudinem illius observationis; facile enim experimur, divisore quocunque accepto, residua ex terminis ordine, quo sequuntur, divisis in circulum redire; sic v. gr. terminus $2^{2^x}+1$, ubi $x=2$; divisus per 7 relinquit 3, ergo terminus sequens relinquit idem residuum, quod relinquitur ex divisione numeri $(3-1)^2+1$ per 7, nempe residuum 5; terminus hunc sequens idem residuum dabit, quod relinquitur ex divisione numeri $(5-1)^2+1$ per 7 divisi, nempe 3; ergo omnia residua possibilia omnium terminorum seriei divisorum per 7 (ubi scil. quotiens sit >0) sunt vel 3 vel 5. Simili ratione facile apparet nullum terminum seriei Fermatianae dividi posse per numerum <100; sed quidquid sit de Fermatii observatione, hoc certum est, omnem numerum 2^p+1, ubi p non sit $=$ alicui numero 2^n (in quo n est numerus integer affirmativus), esse non primum, cujus quidem divisores facillime inveniuntur. Sic numeri $2^{84}+1$ divisor est 17, numeri $2^{1736}+1$ divisor est 257 etc. Vale.

Goldbach.

LETTRE V.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur le théorème de Fermat. Formule qui exprime le nombre des diviseurs d'un nombre donné. Chaque nombre est la somme de quatre quarrés. Formule pour la quadrature du cercle de Grégoire à St.-Vincent.

Petropoli die 4 Junii 1730.

Postquam ultimas ad Te misissem litteras, de theoremate Fermatiano diligentius cogitare coepi, idque non tam levi nixum fundamento, quam primum putaveram, perspexi. Quoties enim in 2^n+1 non est n numerus ex progressione geometrica 1, 2, 4, 8, etc., divisores semper, ut ipse, Vir Celeberrime, in postremis litteris monuisti, assignari possunt. Nam si n est numerus impar, binomium 2^n+1, vel etiam generalius a^n+b^n poterit dividi per $a+b$. Si praeterea fuerit n multiplum quodpiam numeri imparis, uti si $n=ki$, denotante i numerum quemcunque imparem, divisor erit a^k+b^k. Quamobrem, cum solae binarii potentiae hanc habeant proprietatem, ut per nullum numerum imparem dividi possint, praeter unitatem, sequitur tum solum binomii a^n+b^n

ex hoc fonte divisorem assignari non posse, quando n est potentia quaedam binarii. Hoc quidem multum ad evincendam theorematis veritatem, sed tamen non est prorsus sufficiens. Quanquam enim pro n assumitur dignitas quaedam binarii, tamen ex eo inferre non licet $a^n + b^n$ nullos habere divisores; ut si a sit $= 4$, et $b = 3$, etiamsi ponatur $n = 2$, potest $16 + 9$ dividi per 5. Conducit ergo investigare casus, quibus nihilominus divisores locum habent. Perspicuum est primum, si a et b fuerint numeri inter se compositi, ut cf et df, binomium $c^n f^n + d^n f^n$ habere divisorem f^n. Deinde si a et b utrumque fuerit numerus impar, dividi semper poterit per 2. Denique ut hos casus universalius evolvamus, sit $a = mc + \alpha$, et $b = mc + \beta$, erit

$$a^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1} mc + \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^{n-2} m^2 c^2 + \text{etc.},$$

$$\text{et}\quad b^n = \beta^n + n\beta^{n-1} mc + \frac{n(n-1)}{2}\,\beta^{n-2} m^2 c^2 + \text{etc.},$$

$$\text{ergo}\quad a^n + b^n = (\alpha^n + \beta^n) + nmc(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{2} m^2 c^2 (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) + \text{etc.}$$

Ex hoc apparet singulos progressionis terminos praeter primum dividi posse per mc. Quoties igitur $\alpha^n + \beta^n$ et mc communem habent divisorem, per eundem et $a^n + b^n$ dividi poterit. In his igitur aliisque, si qui forte hic non continentur, casibus, quibus $a^n + b^n$ non fit numerus primus, si non comprehenditur casus Fermatii, quo $a = 2$ et $b = 1$, tuto concludi potest $2^n + 1$ semper esse numerum primum. Sed forte et alia hujusmodi theoremata invenire licet, ut $3^n + 2^n$, si n fuerit dignitas binarii, semper numeros primos mihi dare videtur. Caeterum theorema hoc non tam saepe, si unquam fallit, mihi fallere videtur, quam quae de differentiis potentiarum enunciant, cujusmodi est hoc: $2^n - 1$

semper dare numerum primum si n sit numerus primus. Nam si ponatur $n = 11$, $2^{11} - 1$, vel 2047, habet divisorem 23, similiter 47 metitur $2^{23} - 1$, et 223 hoc $2^{37} - 1$. Occurrit mihi hic terminus generalis, quem aliquando inveni, vel functio quaedam ipsius x, quae hanc habet proprietatem, ut quicunque numerus loco x ponatur, ea det numerum divisorum ejusdem numeri; in divisoribus vero habeo et unitatem et numerum ipsum, ita ut numeri primi duos tantum habeant divisores. Est itaque haec mea formula terminus generalis hujus seriei

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 2, & 3, & 2, & 4, & 2, & 4, & 3, & 4, & 2, & 6, \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \end{array}$$

cujus quilibet terminus indicat, quot index subscriptus habeat divisores, ut 6 habet quatuor 1, 2, 3, 6. Significet nunc x numerum quemcunque, erit numerus divisorum ipsius x hic

$$\frac{3 + (-1)^x + 1 + (-1)^A + 1 + (-1)^B + 1 + (-1)^C + 1 + (-1)^D + \text{etc.}}{2}$$

Designant vero A terminum generalem seriei 1, 1, 4, 7, 13, 22, etc., cujus quivis terminus summa est duorum praecedentium et 2; B terminum generalem seriei 1, 1, 1, 6, 11, 21, 41, etc., cujus quilibet terminus est summa trium praecedentium $+ 3$; C terminum generalem seriei 1, 1, 1, 1, 8, 15, 29, 57, etc., cujus quivis terminus est summa quatuor praecedentium $+ 4$. Similis ratio est reliquarum litterarum D, E, etc. Quaeratur hinc numerus divisorum senarii, erit $x = 6$, $A = 22$, $B = 21$, $C = 15$, $D = 10$, $E = 1$, $F = 1$, et reliquae omnes erunt 1. His positis erit numerus divisorum senarii $=$

$$\frac{3 + (-1)^6 + 1 + (-1)^{22} + 1 + (-1)^{21} + 1 + (-1)^{15} + 1 + (-1)^{10} + 1 + (-1)^1 + 1 + (-1)^1 \text{ etc.}}{2}$$

quia autem -1 elevatum ad numerum parem dat $+1$ et ad numerum imparem -1, erit numerus divisorum

$$=\frac{3+1+1+1+1-1+1-1+1+1+1-1+1-1}{2}=4,$$

qui sunt 1, 2, 3, 6. Si igitur quis potuerit, formula illa posita $= 2$, eruere quid sit x, haberetur terminus generalis pro serie numerorum primorum; sed isthuc pertingere non spero. Incidi nuper, opera Fermatii legens, in aliud quoddam non inelegans theorema: *Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum*, seu semper inveniri posse quatuor numeros quadratos, quorum summa aequalis sit numero dato, ut $7 = 1 + 1 + 1 + 4$. Sed tria quadrata nunquam invenientur, quorum summa sit 7. Ad hoc theorema demonstrandum requiritur, ut generaliter quatuor quadrata inveniantur z^2, y^2, x^2, v^2 quorum summa aequalis sit summae quinque datorum $1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Alia ibi habentur theoremata de resolutione cujusvis numeri in trigonales, pentagonales, cubos etc., quorum demonstratio magnum afferret incrementum analysi. Ut pagina haec impleatur transcribam quadraturam quandam circuli, quam ex propositione aliqua Gregorii a St. Vincentio elicui, cujus falsitatem nemo adhuc ostendit. Ea haec est: Si peripheria sit p et diameter d, erit $\frac{p}{d} = \frac{3(1+A)\sqrt{3}}{2(2A-1)}$, est vero $A = \left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{l\,11:5}{l\,203:53}}$, ubi $l\,11:5$ denotat logarithmum fractionis $\frac{11}{5}$ et $l.\,203:53$ logarithmum hujus $\frac{203}{53}$. Haec expressio prope ad $\frac{22}{7}$ accedit, et si vera esset, magnum sane esset inventum.

Vale et favere perge, Vir Celeb., Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE VI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réflexions ultérieures sur le théorème de Fermat et réponse à la lettre précédente.

Moscuae d. $\frac{15}{26}$ Junii 1730.

Etiamsi vera non esset Fermatii propositio, tamen laude digna mihi videtur propterea quod, cum ejus demonstrationem investigamus, in alia incidimus theoremata quorum veritas solidis argumentis evinci potest, quale est illud quod de numero $a^n + b^n$ divisibili per $a + b$, si n fuerit numerus impar, observasti.

Praeterea 1) si a, b, n sint numeri integri, et $\mathrel{\mathpalette\not=}$ significet aequationem impossibilem, posito $\frac{a \pm n}{n^2+1} \mathrel{\mathpalette\not=} b$, sequitur $a^2 + 1$ esse numerum primum; id quod demonstrari potest.

Sufficit autem pro n seligere numeros qui n^2+1 faciunt primos, videlicet 2, 4, 6, 10, 14, etc. (sunt enim 2^2+1, 4^2+1, 6^2+1, etc. numeri primi), sic verbi gratia quoniam illico patet numeros $\frac{20\pm2}{5}$ et $\frac{20\pm4}{17}$ non esse integros, sequitur numerum $20^2+1=401$ esse primum.

2) Verisimile est divisorem minimum (unitatem et numerum ipsum hic pro divisoribus non habeo) cujuscunque numeri $a^{2^x}+1$ esse hujus formae $n^{2^x}+1$, sed hoc quia nondum satis examinavi, affirmare non possum, nisi de unico casu, ubi $x=1$, qui facile demonstratur. Caeterum si verum esset quod verisimile dixi, ex eo demonstraretur theorema Fermatianum, nam v. gr. posito $a=2$, n non posset sumi $=1$ (quoniam $n^{2^x}+1$ fieret numerus par, atque adeo dividere non posset numerum imparem), neque $n=2$ (quoniam divisor $n^{2^x}+1$ fieret $=$ ipsi dividendo), ergo $2^{2^x}+1$ non haberet ullum divisorem.

Utrum numeri (3^n+2^n) (ubi n significat dignitatem aliquam binarii) primi sint, non dixerim; si conjectare libet fortasse etiam $(2.3)^{2^n}+1$ sunt numeri primi, fortasse et $(2p)^{2^x}+1$, si p est primus; sed quis unquam affirmavit numeros (2^n-1) esse primos, si n sit primus?

Quae de termino generali numerorum primorum inveniendo ex formula, numerum divisorum dati cujusvis numeri exprimente, disseris, ingeniose meditata agnosco, etsi in usum deduci, ut ipse animadvertis, vix possint.

Fermatii et Gregorii a S. Vincentio opera me non legisse doleo. Quod ex Fermatio refers theorema: *Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum*, demonstratum videre cupio, facile illinc infertur *Numerum quemcunque esse*

summam tot quadratorum $(3n+1)$ *quot numerus pro arbitrio sumtus n continet unitates.* Sunt mihi complura ejusmodi theoremata in promtu, quorum demonstrationes neque exercitatissimus Mathematicus, nisi forte fortuna, inveniat, etsi sua natura facillimae sint; v. gr. nullum numerum triangularem si ei addatur 4, habere radicem rationalem octavae vel decimae potestatis, seu quod idem est, positis a et n numeris integris fore $\frac{nn+n+8}{2} = a^{9\pm1}$.

De quadratura circuli per logarithmos numerorum, quos in litteris Tuis commemoras, expressa, vehementer dubito, etsi ad verum prope accedat. Sunt etiam numeri surdi simplices qui parum a vero aberrant, ut si data diametro $=1$, peripheriam dicamus $3+\frac{\sqrt{2}}{10}$, hic numerus ne quidem $\frac{2}{100000}$ a vero deficit; ita ut non putem ullam methodum excogitatam esse quae rationem diametri ad peripheriam terminis tam prope veris geometrice definiat quam haec ipsa; quid enim facilius est quam diagonalem quadrati circumscripti dividere in partes decem et unam decimam addere ad triplum diametri? Vale et fave Tuo

Goldbach.

LETTRE VII.

EULER à GOLDBACH.

SOMAIRME. Recherches ultérieures sur les nombres et les diviseurs.

Petropoli die 25 Junii 1730.

Theorematis Fermatiani veritas quotidie mihi magis elucere videtur, sed tamen demonstrationem ejus nondum sum nactus. Sunt mihi autem nonnullae ejus inventae proprietates, quae fortasse ad demonstrationem conficiendam utiles esse possent. Fiat series cujus terminus generalis est $2^{2^{x-1}}+1$ sequens 3, 5, 17, 257, etc., cujus singuli termini secundum Fermatium sunt numeri primi. Demonstrare autem possum nullum terminum per quemquam praecedentium dividi posse, et praeterea si quis terminus haberet divisorem, sequentium nullum per eundem dividi posse, sed

semper residuum fore 2. Certum igitur ex hoc est, omnes ejus progressionis terminos inter se esse primos, vel duos reperiri non posse, qui communem habeant divisorem.

Quod $aa+1$ sit numerus primus, quoties in $\frac{a\pm n}{nn+1}$ nullus numerus inveniri potest, qui pro n substitutus fractionem mutet in numerum integrum, demonstrare etiam possum hoc modo: Investigo casus, quibus $aa+b$ (pono autem $b<2a+1$) fit numerus primus. Fiet hoc si nullos habet divisores; si haberet autem divisores, ii esse hujus formae $a+m$ et $a-n$, quia igitur $aa+b=(a+m)(a-n)$, erit $n=\frac{ma-b}{a+m}=m-\frac{m^2-b}{a+m}=a-\frac{aa-b}{a+m}$. Quoties ergo nullus numerus inveniri potest, qui loco m substitutus, vel $\frac{ma-b}{a+m}$, vel $\frac{mm+b}{a+m}$, vel $\frac{aa+b}{a+m}$, faciet numerum integrum, toties $aa+b$ non habet divisores, et propterea est numerus primus.

Dicis deinde, Vir Celeberrime, divisorem minimum ipsius $aa+1$, si quos habet divisores, esse hujus formae $nn+1$. Sed puto unitatem pro divisore minimo habere oportere; nam hoc nisi esset, theorema verum non esset. Si enim est $a=34$, erit $aa+1=1157$, cujus minimus divisor est 13. Si $a=76$, erit $aa+1=5777$, cujus minimus divisor est 53. Quanquam autem hi divisores minimi non quidem unitate excedant quadratum, tamen sunt fortasse omnes summae duorum quadratorum.

An $6^{2^x}+1$ sit numerus primus, neque affirmare neque negare possum. De generali formula vero $(2p)^{2^x}+1$ nego, etiamsi p fuerit numerus primus. Nam si $p=5$, $x=2$, habebitur 10001, qui non est primus, sed divisorem habet 73. Neque etiam, quod suspicatus eram, $3^{2^x}+2^{2^x}$ est numerus primus; si enim $x=3$, dividi potest 3^8+2^8 per 17.

Fateor me nullum librum nominare posse, in quo invenerim $2^n - 1$ esse numerum primum, si n est numerus primus. Tamen bene memini, in inveniendis numeris perfectis hoc theorema vulgo in usum vocari. Requiritur enim ad eos inveniendos, ut omnes habeantur casus, quibus $2^n - 1$ est numerus primus.

Theorema, quod quicunque numerus sit summa quatuor quadratorum, demonstrare non possum, neque ipse Fermatius demonstrare se posse affirmat. Tamen rem ad hanc quaestionem reduxi, ut $xx + 7$ in quatuor quadrata resolvatur.

Quadraturam circuli Gregorii a St. Vincentio examinavi eamque ex falso lemmati deductam esse deprehendi. Utique si vera non est, etiamsi adhuc centies propius ad veram accederet, tamen prorsus nihili est aestimanda. Sed si vera esset, egregium sine dubio esset inventum. Approximationem Tuam, Vir Celeb., ad rationem peripheriae ad diametrum, utilissimam esse in praxi existimo.

De theoremate Tuo, quod nullus numerus triangularis 4^{nario} auctus habeat radicem rationalem 8^{vae} vel 10^{mae} dignitatis, cogitans, seriem numerorum triangularium investigavi, qui quaternario aucti faciant quadrata, atque inveni radices numerorum eorum trigonalium sequentem constituere progressionem: $-7, 0, 9, 56, 329$ etc., quae hanc habet proprietatem, ut quivis terminus puta n^{mus} aequalis sit $6\,(n-1)^{\text{mo}} - (n-2)^{\text{mo}} + 2$. Similem legem habet series numerorum, quorum quadrata sunt numeri trigonales, quae haec est: $0, 1, 6, 35, 204$, etc., cujus quivis terminus est septuplum praecedentis, demta summa duorum praecedentium. His vestigiis insistens, universaliter seriem numerorum integrorum dare possum, qui loco x substituti faciunt $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

quadratum, notus autem esse debet unus casus, quo id fit quadratum.

Cum mihi nuper theorema Fermatianum, quod nullus numerus trigonalis sit biquadratum praeter 1, occurreret, inquirere coepi an $\frac{xx+x}{2}$ prorsus non possit esse biquadratum, nisi sit $x = 1$ vel 0. Posui primo $\frac{xx+x}{2} = p^2x^2$, eritque $x = \frac{1}{2pp-1}$ et $\sqrt{\frac{xx+x}{2}} = \frac{p}{2pp-1}$. Ut autem $\frac{xx+x}{2}$ fiat biquadratum, debebit $\sqrt{\frac{xx+x}{2}}$ denuo esse quadratum. Quadratum ergo esse debet $2p^3 - p$. Ponatur $p = q + 1$, habebitur $2q^3 + 6qq + 5q + 1$. Radix hujus sumatur $1 + \frac{5}{2}q$ erit $2q^3 + 6qq = \frac{25}{4}q^2$. Ergo $q = \frac{1}{8}$, $p = \frac{9}{8}$ et $x = \frac{32}{49}$. Quamobrem numerus trigonalis, cujus radix est $\frac{32}{49}$, erit biquadratum radicis $\frac{6}{7}$. Ex hoc casu jam cognito infiniti alii inveniri possunt. Hoc autem veritatem theorematis non infirmat, cum Fermatius id tantum de numeris integris intelligi velit. — Rogatus sum Tibi nomine Cl. Bernoullii salutem dicere.

Vale et fave, Vir Celeb., Tui observantissimo

Leonh. Eulero.

LETTRE VIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse sur les mêmes sujets.

Moscuae $\frac{20}{31}$ Julii 1730.

Jam diu animadverti numerum $2^{2^{x+p}}+1$, ubi x et p sint numeri integri, divisum per $2^{2^x}+1$, relinquere 2, propterea quod $(2^{2^x}+1)(2^{2^x}-1)$ est $=2^{2^{x+1}}-1$, rursus $(2^{2^{x+1}}-1)(2^{2^{x+1}}+1)=2^{2^{x+2}}-1$, et sic porro, donec perveniatur ad $2^{2^{x+p}}-1$, qui numerus binario minor est quam $2^{2^{x+p}}+1$; ex eo quidem certe sequitur omnes numeros seriei Fermatianae esse inter se primos, ut dicis; at quantulum hoc est ad demonstrandum omnes illos numeros esse absolute primos?

Quod affirmaveram, divisorem minimum numeri a^2+1 esse hujus formae n^2+1, nullo fundamento niti agnosco, quandoquidem exemplo numeri $a=34$ refelli potest. Haec erronea hypothesis aliam nihilo meliorem peperit: numerum a^2+1 esse primum, si $\frac{a\pm n}{n^2+1}$ non possit fieri integer, quae cum facto $a=34$, satis refutetur, non digna erat nova, qua eandem ornasti, demonstratione. Ob hoc ipsum exemplum a Te allatum, magis quam antea dubito de veritate theorematis Fermatiani; fieri enim potest ut minimus divisor alicujus numeri $2^{2^x}+1$ sit centum, vel centies mille notarum, quem usque ad finem mundi nemo inveniat.

Haud satis intelligo, cur Fermatius affirmavit numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum, nisi methodum aliquam tenuit datum numerum in quatuor quadratos dividendi, quae methodus si proba fuit, ad demonstrationem theorematis satis fuit.

In superioribus litteris meis pro $\frac{2}{100000}$ scribendum erat $\frac{2}{10000}$, quod velim corrigas. Caeterum de fallacia lemmatis Gregoriani a Te deprehensa Tibi gratulor; haud dubie is est fons erroris quem et Cartesium vix triduo immoratum Gregoriano volumini notasse scribit Lipstorpius in Specim. Philos. Cartes. par. 1—2, p. 87. Sane si facilitatem legis, qua progreditur approximatio, spectes, nihil puto de quadratura circuli excogitatum esse quam Leibnitii seriem; sin modum quam citissime approximandi requiramus, eum quem secutus est D. Lagnius (in Comment. Acad. Paris. A. 1719) reliquis praestantiorem ex admirabili quod protulis specimine judicare licet; occultavit ille quidem tum temporis artificium quo usus est, neque scio an deinde explicaverit; posteriorum enim annorum commentarios non memini me vidisse. Si quid Tibi de ejus methodo constat, rogo ut ad me perscribas.

Demonstrationem meam theorematis: nullum numerum trigonalem, praeter 1, esse quadrato-quadratum communicavi cum Cl. Bernoullio nostro litteris Moscua datis, quas, si ad manum sunt, Tibi facile concedet; ex ea demonstratione perspicies non solum nullum numerum n^{2p+2}, sed ne quidem ullum n^2 (praeter 1 et 36) reperiri in trigonalium ordine, tantum abest ut omnes quadrati radicum 0, 1, 6, 35, 204, etc., quarum progressionem in litteris descripsisti, sint trigonales.

Incidi aliquando in solutionem hujus problematis: Numero cuicunque integro quantumvis magno a, cujus tantum duae postremae notae dantur, addere alium numerum integrum b hac lege, ut aggregatum non habeat radicem rationalem ullius potestatis. Sit v. gr. numerus 543664, cujus tantum duas ultimas notas nempe 64 mihi cognitas fingo, reliquis 5436 (vel quibuscunque aliis) occultatis, huic si addatur 2, ita ut fiat 543666, is numerus nullam habet radicem rationalem. Vereor ne totum problema simplicitate sua vilescat, si methodum solvendi et demonstrationem simul addam, quapropter easdem in futuram epistolam differo.

Vale et fave

Goldbach.

LETTRE IX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorème de la résolubilité de chaque nombre entier en quatre quarrés. Série de Mayer, très convergente, pour la valeur de π. Série des nombres dont les quarrés sont des nombres trigonaux. Problème de Pell. Sur le problème proposé par G. dans la lettre précédente. Problème des lunules quarrables.

Petropoli die 10 Augusti 1750.

Quantum mihi constat de theoremate Fermatiano, omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, ipse Fermatius neque demonstrationem ejus habuisse videtur, neque modum generalem numeri cujusque in quatuor quadrata distribuendi; sed id potius videtur tantum observasse et propterea enunciasse, quia nullum exemplum contrarium ab eo fuit deprehensum. Etiamsi autem haec propositio vera sit, tamen difficillima mihi esse videtur demonstrationis inventio; nullam enim legem observare potui in divisione difficillimorum numerorum hujus formae $nn+7$, atque resolutio in quatuor quadrata semper fortuna tantum succedere videtur, neque ulla prorsus regula contineri. Commentarii Academiae Parisinae ad A. 1719 et sequentes non adsunt hic in Bibliotheca et hanc ob rem de methodo D. Lagnii nihil commemorare possum. Quod autem ad aptam et facilem approximationem ad aream circuli attinet, memini Mayerum nostrum b. d. habuisse seriem vehementer convergentem, cujus tres vel quatuor termini tantum sumti darent maximos Ludolphi a Ceulen numeros. Series, quam nuper Tecum communicavi 0, 1, 6, 35, 204, etc., hanc habet proprietatem, ut cujusvis termini quadratum sit numerus trigonalis, neque haec proprietas ad 0, 1 et 6 tantum pertinet. Nam v. g. quadratum termini 35 est 1225, qui est numerus trigonalis radicis 49. Universaliter vero, cum illius progressionis terminus generalis sit $\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1}-(3-2\sqrt{2})^{n-1}}{4\sqrt{2}}$, hujus quadratum est numerus trigonalis radicis

$$\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3-2\sqrt{2})^{n-1}-2}{4}.$$

Ex ea igitur serie quam dedi inveniuntur innumerabiles numeri integri qui simul sunt quadrati et trigonales. Fundamentum ejus sequenti generali theoremate nititur: Si formula az^2+bz+c fit quadratum casu, quo ponitur $z=p$, fiat ea quoque quadratum casu, quo

$$z=\frac{-b+b\sqrt{(1+a\lambda^2)}}{2a}+p\sqrt{(1+a\lambda^4)}+\lambda\sqrt{(ap^2+bp+c)},$$

oportet autem pro λ numerum accipere qui $1+a\lambda\lambda$ faciat quadratum. Si igitur unicus innotescit casus, quo az^2+bz+c fit quadratum, ex hac forma statim invenientur innumerabiles, idque in integris numeris, siquidem λ ita accipiatur ut $\frac{-b+b\sqrt{(1+a\lambda\lambda)}}{2a}$ fiat numerus integer. Omnes autem nu-

meri hoc modo inventi constituunt seriem ex duabus geometricis conflatam. Agitata sunt hujusmodi problemata de numeris integris inveniendis inter Wallisium et Fermatium. Exemplum maxime difficile erat: invenire numeros integros, qui loco x positi efficiant formulam $109xx+1$ quadratum. Pro hujusmodi quaestionibus solvendis excogitavit D. Pell Anglus peculiarem methodum in Wallisii operibus expositam. Eaque ad meum institutum opus habeo, ut $1+a\lambda\lambda$ fiat quadratum. Ea vero methodus tantum ad exempla prorsus numerica patet, neque ejus est usus in formulis arbitrarios coëfficientes habentibus resolvendis, cujusmodi est meus casus az^2+bz+c. Conatus sum similem methodum pro formulis, in quibus indeterminata tres habet dimensiones, invenire. Idem vero non aeque ac in quadraticis praestare potui; sed tamen ea sufficit ad omnes numeros integros inveniendos, legem vero, qua ii progrediuntur, non praebet. Exempla ad hoc illustrandum sint haec: Invenire numeros pyramidales trigonales integros, qui sint quadrati, vel qui sint triangulares plani.

Solutionem Tuam, Vir Celeb., problematis quod perscripsisti, ad propositum numerum alium addere, ita ut summa non habeat radicem rationalem ullius potestatis, ex hoc principio ductam esse statim animadverti, quod nullus numerus ullius dignitatis per solum binarium dividi possit, vel quod nulla potentia sit numerus impariter par. Ex duabus autem postremis notis cujusque numeri cognoscitur, utrum per 4 dividi possit an secus. Quamobrem si talis numerus adjiciatur, qui efficiat summam per 2 sed non per 4 divisibilem, habetur quod desideratur. Idem adhuc pluribus modis potest effici, vel faciendo ut ultima nota sit 0, penultima non; vel ut duae postremae notae sint 05, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95; hujusmodi enim terminationes nullae habent dignitates. Similiter apparet, qualis numerus ad propositum quantumvis magnum, cujus notarum summa tantum datur, addi debeat, ut quod prodit nulla sit potentia. Nimirum talis debet addi, qui ad summam notarum additus reddat eam per 3, sed non per 9 divisibilem.

Methodum Tuam lunulas quadrabiles inveniendi vidi, eaque mihi magnopere placuit propter summam ejus et facilitatem et brevitatem. Persecutus sum idem problema jam diu, prorsus analytice, sequenti modo: Sit (Fig. 1.) semilunula quaecunque ABD, et ex D in AB productam demittatur perpendiculum DC, arcuum AD, BD sinus. Sit $DC = y$, radius arcus $AD = a$, radius arcus $BD = b$; erit integratione per logarithmos absoluta area $ACD =$

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(aa-yy)}}{2},$$

et area $BCD =$

$$\frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(bb-yy)}}{2}.$$

Ex his erit semilunulae area $ADB =$

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} - \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(aa-yy)}+y\sqrt{(bb-yy)}}{2}.$$

Ergo perspicuum est quoties in hac expressione quantitates logarithmicae evanescunt, toties lunulam esse quadrabilem, erit enim $ADB = \frac{y\sqrt{(bb-yy)} - y\sqrt{(aa-yy)}}{2}$. Quamobrem ad lunulas quadrabiles inveniendas oportet ut sit

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} = \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}},$$

vel sumtis numeris

$$\left(\frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}}\right)^{aa} = \left(\frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}}\right)^{bb}.$$

Ex hac aequatione, data relatione inter a et b, determinabitur y, seu semichorda lunulam quadrabilem subtendens. Quanquam in aequatione inventa insunt quantitates imaginariae, tamen in reductione eae ex calculo abeunt, proditurque pro y valor realis. Solutio haec cum Tua, Vir Celeb., congruit, utraque enim omnes dat casus, qui existunt. Vale et fave Vir Celeb., Tibi observantissimo

Leonh. Eulero

LETTRE X.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente. Problème de géométrie.

Moscuae d. 9 Oct. 1750.

Numeros, qui dividi possunt in tot quadrata quot a continet unitates, animadverti posse etiam dividi in quotcunque plura quam a, hoc est in quadrata $a+n$, ubi n denotet numerum integrum affirmativum quemcunque. Si igitur verum est numerum quemcunque dividi posse in quadratos quatuor, theorema generalius enunciari poterit: *Numerum quemcunque rationalem dividi posse in quadratos quotcunque plures quam* 3. Omnis vero numerus qui neque duorum neque trium quadratorum summa sit, semper dividi posse videtur non solum

in quatuor quadratos, sed etiam in 1 et tres quadratos, sic v. gr.

$$7=1+1+1+4;\quad 23=1+4+9+9;\quad 39=1+1+1+36;$$
$$15=1+1+4+9;\quad 28=1+9+9+9;\quad 47=1+1+9+36;$$
etc.

neque ullum exemplum contra adferre poteris; sed hujusmodi theoremata non facile demonstrari cum Fermatio fateor.

Series illa Mayeri, quae tribus quatuorve terminis numeros Ludolphinos exhibuit, magni momenti videtur, si isti tres quatuorve termini breviore tempore et describi et in summam colligi possunt, quam quo tempore opus est ad eosdem numeros methodo Ludolphi determinandos, nisi enim id demonstratur, nihil in ejusmodi serie magnopere admirandum est, cum vel ipsa series Leibnitiana pro lubitu in magis convergentem transmutari possit, si v. gr. millenos quosque terminos ejusdem pro singulis terminis alterius seriei sumamus, sed hujusmodi compendio, ut dixi, nihil proficimus, quoniam ad duos terminos seriei magis convergentis describendos et addendos tantum temporis requiritur quantum ad colligendam summam bis mille terminorum seriei minus convergentis.

Innumeros esse quadratos trigonales satis ostendisti et hanc ob causam multo magis memorabile est Fermatii effatum: nullum numerum trigonalem, praeter 1, esse quadrato-quadratum.

Numerum qui, divisus per 9, relinquit 3 vel 6 non habere radicem rationalem, quemadmodum observasti, jam ante plus quam 12 annos ad amicum scripseram. Locus ex epistola excerptus in Supplem. Actor. Lips. legitur.

Quod mea solutio problematis de quadrandis lunulis Tibi probetur pergratum est, quamquam mihi ipsi displicere coepit, postquam non novam, sed a Cl. Dan. Bernoullio in Exercitat. Mathemat. multo ante expositam vidi. Tua solutio mihi imprimis arridet, quod aequationem ad expressiones definitas reducis, quae sane plus habent elegantiae quam series indefinitae. Caeterum quaecunque hujus problematis solutiones excogitentur, totum negotium in eo est, ut ab expressione, quae determinat aream lunulae, removeantur quantitates a circuli quadratura pendentes; igitur jam ante 7 annos, cum primum hujus problematis mentionem in litteris faceret Nicol. Bernoullius p. m. hanc ei solutionem misi:

Sint (Fig. 2.) duo circuli sese intersecantes in A et C; circulus $AGC = \alpha$; $AHC = \beta$; pars circuli $ADCE = \frac{\alpha}{p}$; $ABCF = \frac{\beta}{q}$; triang. $AEC = b$; $ACF = c$; erit segm. $ADC = \frac{\alpha}{p} - b$; $ABC = \frac{\beta}{q} - c$; adeoque lunula $ABCG = \alpha - \frac{\alpha}{p} + b - \frac{\beta}{q} + c$; et ponendo $\alpha - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} = 0$ (ut scilicet destruantur quantitates quadraturam circuli involventes) erit eadem lunula $ABCG = b + c$.

Occasione problematis Kepleriani de semicirculo CHD (Fig. 3.) ex dato puncto E ita dividendo, ut trilineum CHE sit ad aream semicirculi in ratione data, in alius problematis solutionem incidi:

1. dato radio $AC = 1$,
2. ratione diametri ad peripheriam: 1 ad p,
3. arcus dati ad sinum rectum: $\frac{p}{n}$ ad e,
4. areae trilinei CHE ad aream semicirculi CHD: 1 ad n.

determinare distantiam puncti E a centro A seu lineam $AE = c$ infinitis modis, ita ut sinus HI exprimatur per quantitates p, n, c; postulatur autem solutio, quae determinet lineas AE et HI non per series, sed per expressiones definitas.

Solutio. Sit m numerus arbitrarius, $AE = c =$

$$\frac{2p(1-m)\sqrt{-1}}{n\left[\left(\sqrt{(1-e^2)}+e\sqrt{-1}\right)^m - \left(\sqrt{(1-e^2)}-e\sqrt{-1}\right)\right]^m},$$

erit $HI = \frac{p(1-m)}{nc}$.

LETTRE XI.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Théorèmes de la théorie des nombres. Formules pour la valeur de π. Intégration de formules irrationelles.

Petropoli die 17 Octobr. 1750.

Quod omnis numerus, qui in tot quadrata, quot a continet unitates, dividi potest, etiam in plura possit dividi, ex eo facile intelligitur, quod quadratus numerus quicunque in duos pluresve quadratos possit distribui. Hoc ergo modo numerus quadratorum, qui junctim sumti numerum datum efficiunt, quousque libuerit potest augeri, non vero diminui. Observavi atque demonstrare possum nullum numerum hac forma contentum $mm(4x+3)$ in duo dividi posse quadrata; neque ullum hujus formae $mm(8x+7)$ esse summam trium quadratorum. An vero omnes reliqui in tria pauciorave dividi possint, non dixerim; neque an omnes

numeri in ea formula contenti in quatuor quadrata possint dividi. Saltem nullum exemplum deprehendere potui. Attamen si verum est aliud theorema ejusdem Fermatii, omnem numerum esse summam trium numerorum trigonalium, et hoc inde sequitur omnem numerum $mm(8x+7)$ esse summam quatuor quadratorum. Vi enim illius theorematis omnes numeri comprehenduntur in ista formula $\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$. Propterea hujus octuplum $4aa+4a+4bb+4b+4cc+4c$ complectitur omnia multipla octonarii, seu omnes numeros hujus formae $8x$. Consequenter haec formula $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$ continet omnes numeros hujus formae $8x+3$. Quocirca omnes numeri $8x+3$ sunt summae trium quadratorum. Hanc ob rem omnes numeri formae $8x+4$ vel hujus $8x+7$ sunt in quatuor quadrata resolubiles. Porroque et hi $mm(8x+4)$ atque $mm(8x+7)$. Formula $mm(8x+4)$ aequivalet huic $mm(2x+1)$. Ex hac formula excluduntur omnes numeri impariter pares, iique soli; i. e. numeri formae istius $4x+2$. Etiamsi ergo verum esset Fermatii theorema de numeris trigonalibus, tamen ad veritatem nostri ostendendam necesse insuper est demonstrare omnes numeros $4x+2$ in quatuor quadrata esse resolubiles. Quod attinet ad observationem, omnem numerum in quatuor saltem quadrata divisibilem dividi posse in unitatem et tria quadrata, sive quod eodem redit, si a tali numero unitas auferatur, residuum semper in tria quadrata distribui posset. Haec proprietas utique in omnibus numeris centenario minoribus locum habet, sed numerorum majorum innumerabilia exempla in contrarium afferre possum, cujusmodi est 112, qui numerus quanquam in pauciora quam 4 quadrata dividi nequit, tamen effici non potest, ut unitas in illis quatuor quadratis reperiatur. Nam 111 nunquam in tria quadrata dividetur. Eandem proprietatem habent omnes numeri hac forma contenti $16\,nn(8x+7)$, neque enim hi neque unitate mulctati in tria vel pauciora quadrata possunt dividi. Numeris autem $16nn(8x+7)$ in quatuor quadrata dividendis, non solum effici non potest, ut unitas sed neque ut hujus formae $(2m+1)^2\frac{nn}{dd}$ quadratum locum in illis quatuor quadratis expleat. Denotat hic d numerum dividentem n. — De altera quaestione, quomodo quam facillime maximi numeri Ludolphi a Ceulen quadraturam circuli dantes inveniri queant, scribam quae ipse meditatus sum, cum manuscripta Mayeri amplius inspicere non liceat. Sit diameter circuli b, chorda quaecunque $= x$ et arcus respondens $= S$, erit

$$S = x + \frac{1.x^3}{2.3.b^2} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.b^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.b^6} + \text{etc.}$$

Haec series eo magis convergit quo minor accipitur x. Sed ut ratio peripheriae ad radium inde possit inveniri, oportet ut S cum tota peripheria ex x cum diametro sit commensurabilis. Ad hoc minor chorda rationalis non adhuc est inventa, quam ea arcus 60 graduum, quae est $= \frac{1}{2}b$. Cum autem hoc casu series nequaquam satis convergat, in id cogitandum est, quomodo expressio finita inveniatur ei quam proxime aequalis. Prope accedit haec $S = \frac{60bbx - 17x^3}{60bb - 27xx}$, propius etiam haec $S = x + \frac{840bbx^3 - 122x^5}{120bb(42bb - 25xx)}$, nec non $S = x + \frac{x^3}{6bb}\left(\frac{420bb}{420bb - 311xx}\right)^{\frac{189}{311}}$. Sed hae omnes, nisi x minor quam $\frac{1}{2}b$ accipi potest, non vehementer admodum ad

verum accedunt; propterea maxime consultum erit minorum peripheriae partium chordas, etsi irrationales assumere. Habeo praeterea aliam formulam, qua peripheriam circuli determinare possum. Si diameter ponatur $= 1$, erit peripheria

$$= \frac{16.36.64.100\ldots 4nn}{9.25.49.81\ldots(2n-1)^2}\cdot\frac{8n+2}{2nn+n},$$

vel accuratius

$$\text{peripheria} = 4\,(1+n)\,\frac{4.16.36\ldots 4nn}{9.25.49\ldots(2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}},$$

quae posterior expressio semper est justo major; hic quo major accipitur n, eo vero propior prodibit peripheria. — Vidi Clarissimum Bernoullium nostrum in litteris ad Te, Vir Celeberrime, datis mentionem fecisse theorematis cujusdam mei, hanc formulam $\frac{adx}{\sqrt[m]{(b+cx^m)}}$ semper posse in rationalem transmutari et propterea integrari. Significavit is mihi Te eam formulam multis modis universaliorem reddidisse. Celeberrimus Bernoullius Pater quoque simile effecit; non solum enim eam, sed hanc $\frac{adx}{\sqrt[m]{(ax^m+bx^n)}}$ ad rationalitatem reduxit. Haec videns cogitare coepi, an non omnes plane formulae hoc modo integrari possint, admissis saltem logarithmis. Nam quia $\frac{dx}{x}$ in $x^m dx$ continetur, quae beneficio logarithmorum integrari possunt, ea pro absolute integrabilibus haberi debent. Nullo autem modo hanc formam $\frac{aadx}{\sqrt{a^4-x^4)}}$, quae exprimit elementum curvae elasticae rectangulae, integrare potui neque ellipsin rectificare, etiamsi logarithmi admittantur. Nescio autem, an in nulla Tuarum formularum et hae comprehendantur. Vale et fave, Vir Celeb., Tibi obstrictissimo

Eulero.

LETTRE XII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la dernière partie de la lettre précédente, sur l'intégrabilité des formules irrationelles.

Moscuae 6 Nov. 1750.

In ultima epistola Tua miror diligentiam, quam ad indaganda numerorum mysteria adhibes. Revidi quae ad Celeb. Bernoullium de formula differentiali cujus mentionem facis scripseram, atque illico animadverti casus illos rationales multo brevius quam putaram expediri posse. Praemonendum autem duco formulam $A \ldots \frac{dx}{(x^m + x^n)^{\frac{1}{m}}}$ nihilo generaliorem esse formula $B \ldots \frac{dv}{(v^m + 1)^{\frac{1}{m}}}$, cum per solam substitutionem $x = v^{\frac{m}{m-n}}$ ex A producatur B, quod etiam agnovit Clar.

Daniel Bernoullius. Considerabo jam differentialem hujus formae $C \ldots (1 + x^{\frac{1}{n}})^p dx$ (ubi p sit numerus rationalis non integer), quam dico rationalem fieri si n sit numerus integer quicunque; ponatur enim $x = (z - 1)^n$, mutabitur C in $D \ldots n(z-1)^{n-1} z^p dz$, quam apparet fieri rationalem si n sit numerus quicunque integer. Si vero ponatur $z = v(v-1)^{-1}$, migrabit D in $E \ldots -n(v-1)^{-n-p-1} v^p dv$, quae ad terminos rationales redigi potest, si $-n-p$ sit numerus integer quicunque. Memorabilis haec est convenientia casuum integrabilium et rationabilium (ut sic loquar), illi enim numerum n vel $-n-p$ integrum affirmativum, hi saltem integrum postulant. Vale.

Goldbach.

Note marginale d'Euler: $\frac{dx}{\sqrt[m]{(bx^m + ax^n)}}$ fit rationale, si ponatur $(b + ax^{n-m})^{\frac{1}{m}} = z$; $\frac{dx}{x^p \sqrt[m]{(1 + x^{-n})}}$ est integrabile, si $p - 1$ dividi potest per n.

LETTRE XIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Réduction des formules différentielles irrationelles a la rationalité Théorème général pour l'intégration des formules rationelles.

Petropoli die 9 Novembris A. 1730.

Omnis formula differentialis rationalis hanc habet proprietatem, ut ejus integratio reduci possit ad integrationem hujus $x^m dx$. Quam ob rem si $x^m dx$ pro absolute integrabili habemus, enunciare possumus, omnes formulas rationales esse integrabiles. Cum autem, si $m = -1$, integrale ipsius $x^{-1}dx$ sit lx, cujusmodi expressiones in algebraicis non habemus; si eas tantum formulas integrabiles esse censeamus, quae dant integralia algebraica, oportet superiorem propositionem quodammodo restringi, hocque modo enunciari, ut omnes formulae differentiales, quae in rationales transmutari pos-

sunt, integrabiles esse dicantur, iis exceptis, quae a logarithmis pendent. Atque ex hoc ortum suum habet magna ea convenientia casuum integrabilium et rationalium, quam in postremis litteris annotasti. Nescio autem, cur eas formulas, quae a logarithmis pendent, non pro integrabilibus habere velimus. Haec ratio sane non sufficit, quod aeque difficile sit dicere quod sit lx atque $dx : x$. Similis mihi videtur differentia, quae est inter $\int 2x dx$ et x^2. Deinde demonstratum est quantitatibus logarithmicis aequales algebraicas dari non posse; et propterea ad quasque quantitates exprimendas logarithmi aeque sunt necessarii ac algebraicae quantitates, et si formulam integrando ad logarithmos perduxerimus aeque contenti esse debemus, ac si ad algebraicas esset reducta. Admissis igitur logarithmis tanquam quantitatibus in $\int x^m dx$ contentis, omnes formulae differentiales rationales sunt integrabiles, omnesque irrationales, quae in rationales transmutari possunt. Maximam ergo habet utilitatem cura et studium, quod ponitur in reducendis formulis irrationalibus ad rationales. Ex eo autem, quod omnes formulae rationales ad $x^m dx$ possunt reduci, forte suspicari licet, omnes prorsus formulas differentiales eo reduci posse, vel omnes prorsus formulas irrationales in rationales transmutari posse. Magnam hujus desiderati inveniendi haberem spem, si quis hanc tantum expressionem $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ ad rationalitatem reducere doceret. Formula Tua, V. C., $(1 + x^{\frac{1}{n}})^p dx$, quae rationalis redditur, si vel n vel $n+p$ fuerit numerus integer, latissime patet; deprehendi enim complures formulas, quas non putassem, ut $\frac{dx}{\sqrt[m]{(1+x^m)}}$ et $\frac{dx}{\sqrt[m]{(x^n+x^{m+n})}}$ in ea comprehendi. Aequivaletque Tuum hoc theorema sequenti meo, quanquam universalius videatur: $\frac{dz}{\sqrt[m]{(z^p + z^q)}}$ ad rationalitatem reduci potest quoties vel $\frac{p-m}{m(p-q)}$ vel $\frac{q-m}{m(q-p)}$ est numerus rationalis. Ad integrandas autem quascunque formulas rationales theorema sequens inveni:

$$\int \frac{dx(a-x)(b-x)(c-x)\text{ etc.}}{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)\text{ etc.}} = \frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\text{ etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\text{ etc.}}\, l\, \frac{x+\alpha}{\alpha} +$$

$$\frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\text{ etc.}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\text{ etc.}}\, l\, \frac{x+\beta}{\beta} + \frac{(\gamma+a)(\gamma+b)(\gamma+c)\text{ etc.}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)\text{ etc.}}\, l\, \frac{x+\gamma}{\gamma} + \text{etc.}$$

$$\pm Ax \mp \frac{Bx^2}{2} \pm \frac{Cx^3}{3} \mp \text{etc.}$$

Horum posteriorum terminorum algebraicorum nullus adest, si (posito numero factorum numeratoris $a-x$, $b-x$, $c-x$ etc. m, et numero factorum denominatoris n) $n = m$ vel $m < n$. Primus tantum Ax locum habet, si $m = n + 1$. Duo vero Ax et $\frac{Bx^2}{2}$ sunt adjiciendi si $m = n + 2$; tres, si $m = n + 3$, et ita porro. Signorum ambiguorum sumentur superiora, si n est numerus par, at inferiora, si n est numerus impar. Litterae vero majusculae, quae valent si $m > n$, sequentes habent valores: A significat summam omnium factorum quae constant ex tot litteris litterarum α, β, γ, δ, etc. et a, b, c, d, etc. quot $m - n$ continet unitates; B significat summam omnium factorum tot habentium factores ex iis litteris desumtos, quot $m - n - 1$ continet unitates; C summam omnium factorum, quae habent $m-n-2$ factores etc. Excluduntur autem omnia ea facta in quibus quaepiam latina littera plures quam unam habet dimensiones. Complectitur autem haec generalis formula integrata omnes formulas differentiales rationales. Numerus enim factorum, quam in numeratore tam in denominatore, est arbitrarius. Quod autem in omnibus factoribus x unius tantum sit dimensionis, id universalitati non nocet, omnes enim formulae algebraicae, in quibus x plures habet dimensiones, sunt divisibiles in hujusmodi factores simplices. Denique facile perspicitur id universalitati non obesse, quod x alios coëfficientes nisi $+1$ et -1 non habeat. Vale, V. C., et fave Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE XIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Réponse à la lettre précédente.

Moscuae d. $\frac{18}{29}$ Nov. 1731.

Jam in litteris Cal. Jun. 1730 ad Cl. Bernoullium datis monueram formulas

$$A\cdots\frac{dx}{(x^a+1)^{\frac{1}{n}}},\quad B\cdots\frac{u^b du}{(u^c+1)^{\frac{1}{n}}},\quad C\cdots\frac{dv}{(v^e+v^f)^{\frac{1}{n}}}$$

pro iisdem haberi posse, et propterea me uti velle formula A, in qua duae tantum exponentes arbitrariae insunt, cum in binis reliquis formulis tres exponentes reperiantur.

In formula Tua, quam pro $\int dx\frac{(a-x)(b-x)\text{ etc.}}{(\alpha+x)(\beta+x)\text{ etc.}}$ adsignas, non video quid fiat denominatore $=0$ in expressione $\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)\text{ etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\text{ etc.}}$, si $\beta=\alpha$, vel $\gamma=\alpha$ etc.

Quod attinet ad $\int(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx$ non facile puto inventum iri integralem praeter casus, quos jam in praecedente epistola

mea expressi, si scilicet per casus integrabiles eos tantum intelligemus, qui vulgo dici solent, quodsi vero magis ad naturam rei quam ad usum, qui inter Mathematicos obtinuit, respiciamus, apparebit sane eodem jure, quo hujus differentialis $(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$ integralis genuina statuitur $-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$, posse etiam $(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx$ quovis alio casu integrari; nam cum $\int(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx$, ut notum est, resolvi possit in

$$A\ldots\left(x+\frac{p+n+1}{n+1}Ax^{\frac{n+1}{n}}+\frac{p+n+2}{n+2}Bx^{\frac{n+2}{n}}+\text{etc.}\right)(1-x^{\frac{1}{n}})^{p+1}$$

vel in

$$B\cdots\left(\frac{-n}{p+1}x^{\frac{n-1}{n}}+\frac{n-1}{p+n-1}Ax^{\frac{n-2}{n}}+\frac{n-2}{p+n-2}Bx^{\frac{n-3}{n}}+\text{etc.}\right)(1-x^{\frac{1}{n}})^{p+1}$$

vel in

$$C\cdots x-\frac{pn}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+\frac{p.p-1.n}{2.n+2}x^{\frac{n+2}{n}}-\frac{p.p-1.p-2.n}{2.3.n+3}x^{\frac{n+3}{n}}+\text{etc.}$$

ad inveniendam integralem nihil aliud requiritur, quam ut determinetur formula generalis summarum hujus seriei

$$\frac{-n}{p+1}x^{n-1}+\frac{n-1}{p+n-1}Ax^{\frac{n-2}{n}}+\text{etc.}$$

per expressionem quae finita maneat, posito pro n numero quocunque non integro; qua ratione autem hujusmodi formula designari possit, in dissertatione mea dixi, sola differentia, quae inter integrales has novas et alias jam cognitas irrationales (v. gr. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$) intercedit, haec est quod illae a Mathematicis nondum receptae, hae longo usu jam confirmatae sunt.

Caeterum aequatio $(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx=dy$ facile reducitur ad hanc $dz=(p+1)z\,dv+n(1-z)v^{-1}dv$, in qua exponentes prioris n et p coëfficientium locum tenent. Vale mihique fave.

Goldbach.

LETTRE XV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Développement ultérieur du théorème précédent. Substitution pour la résolution de l'équation Riccati. Cas où $2^n - 1$ est un nombre composé, quand même n serait premier.

Petropoli die 25 Novembris A. 1751.

In integrali hujus formulae $dx\,\frac{(a-x)(b-x)(c-x)\text{ etc.}}{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)\text{ etc.}}$ utique difficulter apparet, quid fiat, si litterarum α, β, γ, etc. aliquot fuerint aequales. Denominatores in aliquot integralis mei terminis tum evanescunt, et propterea ipsum integrale infinitum fieri videtur. Verum si ad signa terminorum istorum attendimus, videbuntur ii se potius destruere, atque in nihilum abire. Horum autem neutrum recte se habet; nam termini illi in infinitum crescentes junctim sumti dabunt valorem determinatum finitum quem sequenti modo investigo. Sit $\beta = \alpha$, erit difficultas in duobus integralis terminis istis

$$\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\text{ etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\text{ etc.}}\,l\,\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\text{ etc.}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\text{ etc.}}\,l\,\frac{x+\beta}{\beta}$$

posita. Ad eorum verum valorem inveniendum pono $\beta = \alpha + d\alpha$, $d\alpha$ vero denotat quantitatem infinite parvam, tantumdem ergo est ac si posuissem $\beta = \alpha$. Brevitatis gratia scribo P loco $\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\text{ etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\text{ etc.}}$. Sumo deinde hujus fractionis differentiale, posito tantum α variabili, sit illud $Q\,d\alpha$. Manifestum est fore $\frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\text{ etc.}}{(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\text{ etc.}} = P + Q\,d\alpha$. Est vero etiam $\beta - \alpha = d\alpha$ et $\alpha - \beta = -\,d\alpha$ et $l\,\frac{x+\beta}{\beta} = l\,\frac{x+\alpha+d\alpha}{\alpha+d\alpha} = l\,\frac{x+\alpha}{\alpha} - \frac{x\,d\alpha}{\alpha(\alpha+x)}$. His substitutis, duo illi termini abibunt in $\frac{P}{d\alpha}\,l\,\frac{x+\alpha}{\alpha} - \frac{P}{d\alpha}\,l\,\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{Px}{\alpha(\alpha+x)} - Q\,l\,\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{Qx\,d\alpha}{\alpha(\alpha+x)}$. Horum duo priores termini sese tollunt, et postremus prae reliquis evanescit, ita ut pro valore duorum terminorum quaesito habeamus $\frac{Px}{\alpha(\alpha+x)} - Q\,l\,\frac{x+\alpha}{\alpha}$, qui in integrali eorum loco substitui debet. Est vero, ut posui, $P = \frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\text{ etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\text{ etc.}}$, atque ex hoc erit

$$Q = \frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\text{ etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\text{ etc.}}\left(\frac{1}{\alpha+a} + \frac{1}{\alpha+b} + \frac{1}{\alpha+c} + \text{etc.} + \frac{1}{\gamma-\alpha} + \frac{1}{\delta-\alpha} + \text{etc.}\right).$$

Notandum hic est in casu $\beta = \alpha$ non totam quantitatem esse transcendentalem, sed partem ejus esse algebraicam, cum tamen universaliter ambo termini sint transcendentes. Si jam ulterius fuerit $\gamma = \alpha$, eodem modo terminorum infinitorum valor ponendo $\gamma = \alpha + d\alpha$ determinabitur.

De formula $\int (1 - x^{\frac{1}{n}})^p\,dx$ non dubito quin omnes integrabilitatis casus a Te, V. C., sint eruti. Sed de reductione aequationis $(1 - x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ ad hanc $dz = (p+1) z d\nu + n(1-z) d\nu : \nu$ dubium habeo, cum posterior aequatio nunquam sit absolute integrabilis, siquidem adjectionem constantis non negligamus. Sumamus casum simplicissimum, quo $p = 1$ et $n = 1$, erit $dz - 2 z d\nu + \frac{z d\nu}{\nu} = \frac{d\nu}{\nu}$. Multiplicetur haec per $e^{l\nu - 2\nu}$, seu quod idem est, per $e^{-2\nu}\nu$ (e denotat hic numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est $= 1$), prodibit $e^{-2\nu}\nu dz - 2e^{-2\nu} z \nu d\nu + e^{-2\nu} z d\nu = e^{-2\nu} d\nu$, quae integrata dat $e^{-2\nu}\nu z = \text{Const.} - \frac{1}{2} e^{-2\nu}$ seu $2\nu z + 1 = a e^{2\nu}$, quae algebraica non est, nisi sit $a = 0$, et propterea ea ad hanc $x - \frac{1}{2} xx = y + b$ substitutionibus algebraicis reduci non potest. Similis est ratio formulae generalis, haec enim nullo casu est integrabilis ad aequationem algebraicam, nisi constans addenda ponatur $= 0$.

Casus nuper formulae Riccatianae separabiles considerans, sequentem universalem detexi substitutionem, qua aequatio $a dq = q^2 dp - dp$ ad hanc formam $a dy = y^2 dx - x^{-\frac{4n}{2n+1}} dx$ reduci potest. Ponatur $p = (2n+1) x^{\frac{1}{2n+1}}$ atque

$$q = -\frac{a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{5a}{p} + \cfrac{1}{-\frac{7a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc. etc.} \cfrac{1}{-\frac{2(n-1)a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}} y}}}}}}$$

Haec tantum valet substitutio si n est numerus affirmativus integer, peculiarem habeo si est negativus. Quoties in hac n est numerus integer affirmativus, toties haec fractionum series abrumpitur, et quid pro q substitui debet, facile determinatur.

Reciproce etiam aequationem $a dy = y^2 dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx$ in hanc $a dq = q^2 dp - dp$ transformo hac substitutione $x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ et $y(p : 2n+1)^{2n} = $

$$\cfrac{1}{\frac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{\frac{(2n-3)a}{p} + \cfrac{1}{\frac{(2n-5)a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc. etc.} \cfrac{}{\frac{3a}{p} + \cfrac{1}{\frac{a}{p} + q}}}}}}$$

Facile hic cognoscitur, si valores harum continuarum fractionum inveniri possent si n denotat numeros fractos, tum formulam $a dy = y^2 dx - x^m dx$ universaliter posse construi. Interpolatio vero ista nititur inventione termini generalis pro serie hujus proprietatis, si terminus x^{mus} fuerit A, ejus sequens B debet terminus $(x+2)^{\text{mus}}$ esse $= (2m+1) B + A$, vel in numeris hujus seriei: 1, 1, 4, 21, 151, 1380, etc.

Perpendi ulterius etiam formulam $2^n - 1$, quae non potest esse numerus primus nisi sit n numerus primus, et eos investigavi casus, quibus $2^n - 1$ non est numerus primus, quamvis fuerit n talis. Exceptiones istae sunt $n = 11$, $n = 23$, $n = 83$, reliqui numeri primi omnes centenario