IV.

Fragmenta commentationis cujusdam majoris, de invenienda relatione inter latera triangulorum, quorum area rationaliter exprimi possit.

(Conf. *Comment. arithm.* Prooem. pag. X. N. 6.)

. . . .

27. Problemate igitur proposito ita soluto, ut nihil ultra desiderari possit, siquidem solutio tradita latissime patet. Verum praeter animadversiones jam allatas, solutio adhuc alias rationes suppeditat, quarum evolutio non parum ad analyseos incrementum conferre videtur. In hujusmodi enim quaestionibus non tam solutioni ipsi, quam usui in reliquis analyseos partibus intentos nos esse convenit.

28. Primum igitur observo, etiamsi in formulis pro lateribus trianguli § 8 latus a longe alio modo ac reliqua b et c exprimatur, tamen ea inter se ita esse permutabilia, ut nulli prae reliquis ulla praerogativa tribui possit. Ita in casibus § 12 evolutis videmus latus a casu primo esse 14, cum in casu tertio, qui idem triangulum praebet, numerus 14 lateri c conveniat. Simili modo latera a et c in casibus congruis 2^{do} et 9^{no}, idem 4^{to} et 13^{tio} inter se permutantur.

29. Haec permutabilitas, non obstante expressionum diversitate, omni attentione digna videtur. Quae quo clarius agnoscatur, ea non solum in lateribus triangulorum, quae problemati proposito satisfaciunt, locum habere deprehenditur, sed etiam generatim in omnibus triangulis, quorum area rationaliter exprimi potest; in formulis enim pro hujusmodi triangulis § 5 datis similis disparitas inter latus a et duo reliqua b et c observatur.

30. Ad hoc ostendendum contemplemur rationem ternorum laterum hujusmodi triangulorum, quorum area est rationalis, quae ita se habet:

$$a : b : c = \frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{pqrs} : \frac{pp+qq}{pq} : \frac{rr+ss}{rs},$$

ubi latera b et c semper eam inter se tenent rationem, quam duae fractiones hujus formae $\frac{ff+gg}{fg}$, a qua tamen fractio $\frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{pqrs}$ abhorrere videtur. In hac quidem signa ambigua adhibui, quoniam binis lateribus b et c gemini valores lateris a conveniunt.

31. Docendum ergo est etiam latera a et b semper talem rationem inter se tenere, qualis est inter binos numeros formae $\frac{ff+gg}{fg}$. Cum igitur sit

$$a : b = \frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{rs} : pp + qq,$$

dico eandem proportionem ita exprimi posse, ut sit

$$a : b = \frac{rr + ss}{rs} : \frac{xx + yy}{xy},$$

convenientia enim perspicua reddetur sumendo $x = ps \pm qr$ et $y = pr \mp qs$.

32. Posito enim $x = ps \pm qr$ et $y = pr \mp qs$, erit

$$xx + yy = (pp + qq)(rr + ss) \quad \text{et} \quad xy = (ps \pm qr)(pr \mp qs),$$

unde fit

$$\frac{rr + ss}{rs} : \frac{xx + yy}{xy} = \frac{rr + ss}{rs} : \frac{(pp + qq)(rr + ss)}{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}$$

ideoque

$$\frac{rr + ss}{rs} : \frac{xx + yy}{xy} = \frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{rs} : pp + qq,$$

quae est ipsa ratio, quam formulae nostrae inter a et b praebuerunt.

33. Quare si a, b, c sint latera trianguli, cujus area rationalis, inter bina quaeque alia ratio existere nequit, nisi quae intercedat inter binos numeros formae $\frac{ff + gg}{fg}$. Ac si duo latera aliam inter se teneant rationem, nullo modo tertium latus inveniri potest, quod cum illis aream rationalem includat.

34. Quomodo ergo hae rationes, quae inter bina latera trianguli aream rationalem habentis intercedere possunt, sint comparatae, et quaenam hinc excludantur, haud abs re erit diligentius inquirere. Considerari ergo primum oportet fractiones in forma $\frac{ff + gg}{fg}$, vel potius in hac $\frac{ff + gg}{2fg}$ contentas.

35. Haec autem fractio $\frac{ff + gg}{2fg}$ pro numeratore habet hypothenusam trianguli rectanguli rationalis pro . . . .

49. Huic problemati affine est istud:

Invenire triangulum, in quo rectae, ex singulis angulis ita ductae, ut latera opposita bifariam secent, per numeros rationales exprimantur;

quod autem illo ideo difficilius est judicandum, quoniam non generaliter solvi patitur. Positis a, b, c lateribus trianguli, negotium huc redit, ut tres istae formulae

$$2aa + 2bb - cc, \quad 2aa + 2cc - bb, \quad 2bb + 2cc - aa$$

reddantur quadrata.

50. Si in hunc finem ponatur

$$a = (m + n)p - (m - n)q, \quad b = (m - n)p + (m + n)q, \quad c = 2mp - 2nq,$$

ut formula prima quadrata evadat; pro reliquis ad quadratum revocari debent hae formulae

$$(3m + n)^2 pp - 2(3mm + 8mn - 3nn)pq + (3n - m)^2 qq \quad \text{et}$$
$$(3m - n)^2 pp - 2(3nn + 8mn - 3mm)pq + (3n + m)^2 qq$$

quorum productum sufficiet quadrato coaequasse. Est vero productum

$$\left.\begin{array}{l} +(9mm-nn)^2p^4-8mn(27mm+13nn)p^3q \\ +(9nn-mm)^2q^4-8mn(27nn+13mm)pq^3 \end{array}\right\} -6(3m^4-94mmnn+3n^4)ppqq.$$

51. Si radix statuatur

$$(9mm-nn)pp-\frac{4mn(27mm+13nn)}{9mm-nn}pq+(9nn-mm)qq,$$

elicerentur hi valores:

$$p=(mm+nn)(9mm-nn) \quad \text{et} \quad q=2mn(9mm+nn),$$

ex quibus sequentia triangula simpliciora concluduntur

$a=87$,	$a=127$,	$a=207$,	$a=881$,	$a=463$
$b=85$,	$b=131$,	$b=328$,	$b=640$,	$b=142$
$c=68$,	$c=158$,	$c=145$,	$c=569$,	$c=529$.

52. Cum hic invenienda sint tria quadrata, ut binorum summa duplicata, tertio minuta, fiat quadratum, simili modo facile solvitur quaestio de tribus quadratis, quorum binorum summa ipsa, tertio minuta, fiat quadratum. Quo in genere facillima videtur quaestio haec:

Invenire tria quadrata, quorum binorum summa sit quadratum.

Verum tentanti mox patebit, hujus solutionem multo majoribus difficultatibus implicari. Si enim positis his quadratis aa, bb et cc, statuatur

$$b=\frac{2mn}{mm-nn}a \quad \text{et} \quad c=\frac{2pq}{pp-qq}a,$$

ut tam $aa+bb$, quam $aa+cc$ fiant quadrata, superest, ut haec formula

$$mmnn(pp-qq)^2+ppqq(mm-nn)^2$$

aequetur quadrato; cujus tractatio frustra suscipitur.

53. Commodissima autem methodus hoc problema solvendi videtur statuendo

$$aa=4mnpq, \quad b=mp-nq \quad \text{et} \quad c=np-mq,$$

ut fiat
$$aa+bb=(mp+nq)^2 \quad \text{et} \quad aa+cc=(np+mq)^2.$$

Quo igitur et $bb+cc$ fiat quadratum, fiat

$$mp-nq=2(mm-nn)rs=b, \quad np-mq=(mm-nn)(rr-ss)=c$$

eritque
$$bb+cc=(mm-nn)^2(rr+ss)^2.$$

Cum autem hinc prodeat

$$p=2mrs-n(rr-ss) \quad \text{et} \quad q=2nrs-m(rr-ss),$$

habebitur $\frac{aa}{4}=mmnnr^4-2mn(mm+nn)r^3s+2mmnnrrss+2mn(mm+nn)rs^3+mmnns^4$.

54. Ad hanc speciali saltem modo resolvendam fingatur

$$\frac{a}{2}=mnrr-(mm+nn)rs+mnss,$$

elicieturque $r = 4mn$ et $s = mm + nn$, unde numeris m et n arbitrio nostro relictis, consequimur sequentes numerorum a, b, c valores

$$a = 2mn(3mm - nn)(3nn - mm),$$
$$b = 8mn(mm - nn)(mm + nn),$$
$$c = (mm - nn)(mm - 4mn + nn)(mm + 4mn + nn).$$

55. Hinc simplicissima solutio eruitur sumendo $m = 2$ et $n = 1$, unde resultant hi numeri

$$a = 44 \qquad aa = 1936 \qquad aa + bb = 59536 = 244^2$$
$$b = 240 \qquad bb = 57600 \qquad aa + cc = 15625 = 125^2$$
$$c = 117 \qquad cc = 13689 \qquad bb + cc = 71289 = 267^2.$$

. . . .