III.

De numeris amicabilibus.

(Conf. *Comm. arithm.* Prooem. pag. XVII. N. 56. nec non Suppl. Prooem. N. 1.)

§ 1. Inter omnia problemata, quae in mathesi tractari solent, nunc quidem a plerisque nulla magis sterilia atque ab omni usu abhorrentia existimantur, quam ea, quae in contemplatione naturae numerorum et divisorum investigatione versantur. In quo judicio hodierni mathematici a veteribus non mediocriter dissentiunt, qui hujusmodi speculationibus multo majus pretium constituere sunt soliti. Etsi enim Veteres non ignoraverunt ex indagatione naturae numerorum parum utilitatis ad eam matheseos partem, quae applicata vocari solet, et in investigatione rerum ad physicam potissimum pertinentium est posita: tamen nihilominus in scrutandis numerorum proprietatibus multum studii et laboris consumserunt. Praeterquam enim, quod ipsis investigatio veritatis per se laudabilis atque humana cognitione digna videretur, probe etiam senserunt his rebus ipsam artem inveniendi mirum in modum amplificari, mentisque facultates ad graviora negotia expedienda aptiores reddi. Neque etiam ipsos in hac opinione deceptos fuisse, summa incrementa, quibus analysis ab his temporibus est locupletata, manifesto testantur; maxime enim verisimile videtur hanc scientiam nunquam ad tantum perfectionis gradum perventuram fuisse, nisi Veteres tantum studium in hujusmodi quaestionibus evolvendis, quae hodie ob sterilitatem tantopere a plerisque contemnuntur, collocavissent. Hincque eo minus dubitare licet, quin his rebus ulterius excolendis etiam in posterum analysi insignia incrementa afferantur.

§ 2. Antiquissimis jam temporibus Euclides multas praeclaras numerorum proprietates collegit, veramque rationem numeros perfectos inveniendi tradidit, ut mirum sit, plures recentiores mathematicos in hoc genere tam misere esse hallucinatos. Ex Diophanti autem temporibus luculenter apparet, tam Graecos quam Arabes plurimum studii in numerorum doctrina excolenda posuisse: quod idem institutum post restauratum in Europa litterarum studium primi matheseos cultores summa industria sunt prosecuti; hocque ipso viam ad altiores investigationes praeparaverunt. Cartesius certe, cui praecipue partes promotae analyseos merito debentur, speculationes numericas minime est aspernatus, atque multo magis in hoc negotio elaboraverunt Fermatius et Freniclius, qui etiam acutissimum mathematicum Wallisium quasi invitum ad hoc studium excitaverunt, quemadmodum ex commercio epistolico, secundo ejus operum tomo inserto, abunde perspicere licet. Inter eos vero qui in Germania sese primo ad algebram applicuerunt, Michaël Stifel imprimis magnam laudem est adeptus, qui temporibus Lutheri vixit. Hic, ut specimen singularis analyseos afferret, cui enodando communia algebrae praecepta non sufficerent, mentionem fecit problematis, quo duo numeri ita affecti quaeruntur, ut omnes partes aliquotae minoris numeri, simul sumtae, majorem numerum, ac vicissim omnes partes aliquotae majoris numeri, simul sumtae, minorem numerum producant; talesque numeros invenit 220 et 284. Cartesius etiam hoc problema dignum judicavit, in quo solvendo vires suas exploraret, aliosque insuper hujusmodi numeros elicuit, qui ista proprietate gauderent: atque regulam investigavit, cujus ope plures istiusmodi numeri reperiri possunt, quam Schotenius in Exercitionibus mathematicis exposuit. Neque vero haec regula est generalis, neque plures quam tres solutiones suppeditare valet.

§ 3. Pertinet igitur haec quaestio ad id genus, quod in contemplatione partium aliquotarum versatur; quae doctrina cum a natura quantitatum continuarum, ad quas analysis proprie est accommodata, plurimum abhorreat, prorsus singulari modo tractari debet, nisi tentando solutionem expedire velimus. Quanquam autem Schotenius ad hujusmodi problemata solvenda certam methodum sibi proposuisse videtur, dum usum calculi analytici introducere est conatus; tamen si ejus ratiocinium attentius inspiciamus, praecipua solutionis pars in mera tentatione consistit, atque omni fundamento destituitur. Temere enim pro hujusmodi numeris certas assumit formulas, in quibus numeros idoneos contineri suspicatur, cum tamen eodem jure quasvis alias assumere potuisset: atque in harum ipsarum formularum evolutione plurimum casui et fortunae tribuitur: unde Stifelium immerito reprehendit, quod putaverit, solutionem hujusmodi problematum in certa methodo comprehendi non posse. Quin potius igitur erit fatendum, eam analyseos partem, quae in scrutatione quantitatum discretarum versatur, maxime adhuc esse imperfectam, certaque principia, quibus ea superstruatur, etiam nunc desiderari. Atque ob hunc ipsum principiorum defectum ad hujusmodi problemata numerica resolvenda plurimum solertiae et perspicaciae requiritur: et plerumque singulari ratiocinii genere opus est, in quo maxima ingenii vis cernitur. Hancque ob causam, etiamsi ipsa horum problematum solutio in analysi parum utilitatis habere videatur, tamen methodus, qua tot tantaeque difficultates superantur, fines analyseos non mediocriter promovere est censenda. Quo plures enim diversae viae ad veritatem indagandam aperiuntur, eo majora incrementa ipsa ars inveniendi cepisse est existimanda.

§ 4. Quemadmodum in universa analysi usus idoneorum signorum plurimum valet, ita etiam in hoc genere, quod circa divisores et partes aliquotas numerorum instituitur, non parum utilitatis a commoda designandi ratione erit exspectandum. Numeros igitur, quos hic vel contemplamur, vel quaerimus, litteris alphabeti minusculis indicabo, litteris vero majusculis utar ad summas divisorum eorum numerorum, qui respondentibus minusculis exhibentur, repraesentandas. Ita si a denotet numerum quemcunque integrum et affirmativum, cujusmodi numeros in hoc negotio semper intelligere oportet, littera majuscula respondens A indicabit summam omnium divisorum numeri a. Simili modo litterae B, C, D, etc. expriment in posterum summas divisorum numerorum b, c, d, etc. scilicet si sit $a = 10$, erit $A = 18$, et si $b = 50$, erit $B = 93$. Cum igitur cujusque numeri partes aliquotae sint ejusdem divisores, ipso illo numero excepto, qui, etsi sui ipsius est divisor, tamen partibus aliquotis non annumeratur, summa partium aliquotarum numeri a erit $= A - a$, nisi sit $a = 1$.

Hoc enim casu, cum unitas cujusque numeri tam divisor quam pars aliquota censeri soleat, erit quoque $A = 1$ et partium aliquotarum summa $= 1$ putatur. Verum cum unitas in hujusmodi quaestionibus non inter numeros collocari soleat, haec exceptio nullam difficultatem afferet.

§ 5. Hoc igitur litterarum significatu praemisso, cum numerorum primorum nulla detur pars aliquota praeter unitatem, et quilibet numerus primus alios non habeat divisores praeter unitatem et se ipsum, si a fuerit numerus primus, erit $A = a + 1$. Atque si a fuerit quaepiam potestas numeri primi p, summa divisorum ejus A facile assignari poterit. Sit enim $a = p^2$, erit utique $A = 1 + p + p^2$; ac si $a = p^3$, erit $A = 1 + p + p^2 + p^3$. In genere autem, si denotante p numerum primum quemcunque fuerit $a = p^n$, erit $A = 1 + p + p^2 + \ldots\ldots + p^n$, qui divisores cum constituant progressionem geometricam, erit quoque: $A = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$. Unde si a fuerit potestas quaecunque numeri primi p, quicunque sit ejus exponens, erit semper $A = \frac{pa - 1}{p - 1}$. Si igitur sit a potestas binarii, erit $A = 2a - 1$; sin sit a potestas ternarii, erit $A = \frac{3a - 1}{2}$; sin potestas quinarii, erit $A = \frac{5a - 1}{4}$ et ita porro.

§ 6. Quodsi a fuerit productum ex duobus diversis numeris primis p et q, puta $a = pq$: erit summa divisorum $A = 1 + p + q + pq = (1 + p)(1 + q)$. Simili modo si plures habeantur numeri primi diversi p, q, r, s, etc. fueritque $a = pqr$, erit $A = (1 + p)(1 + q)(1 + r)$, et posito $a = pqrs$, erit $A = (1 + p)(1 + q)(1 + r)(1 + s)$. Cum autem sit $p + 1 = P$, $q + 1 = Q$, $r + 1 = R$, etc., si fuerit $a = pq$, erit $A = PQ$, et si sit $a = pqr$, erit $A = PQR$, etc.; quae expressionum similitudo non solum locum habet, si p, q et r sint numeri primi diversi, sed etiam dummodo fuerint numeri primi inter se, ut praeter unitatem nullum alium divisorem habeant communem. Si enim sit P summa divisorum numeri p, et Q summa divisorum ipsius q, atque hae summae P et Q praeter unitatem nullum numerum communem contineant, tum productum $a = pq$ primo eosdem habebit divisores, quos factor p, quorum summa est $= P$; deinde divisores quoque habet numeri q, quorum summa est $= Q$; in quibus quoniam unitas bis occurrit, summa utrorumque divisorum erit $= P + Q - 1$. Tertio productum pq divisibile erit per singula producta ex binis divisoribus numerorum p et q, exclusa utrinque unitate; horum autem compositorum divisorum summa erit $= (P - 1)(Q - 1) = PQ - P - Q + 1$, quae cum summa simplicium $P + Q - 1$ facit PQ; ita ut posito $a = pq$, sit $A = PQ$.

§ 7. Cum igitur omnis numerus sit vel primus, vel productum ex aliquot primis, eorumve potestatibus, ex resolutione numerorum in factores facile eorundem summa divisorum cognoscitur. Positis enim p, q, r, etc. numeris primis, omnis numerus in hujusmodi forma continebitur: $a = p^m q^n r^k \ldots$. Cum igitur factoris p^m summa divisorum sit $= \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}$, et factoris q^n sit $= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, ipsiusque r^k summa divisorum sit $= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$, ob istos factores p^m, q^n, r^k, inter se primos, erit numeri propositi $a = p^m q^n r^k \ldots$ summa divisorum

$$A = \frac{(p^{m+1} - 1)(q^{n+1} - 1)(r^{k+1} - 1)}{(p - 1)(q - 1)(r - 1)} \ldots$$

Hocque modo ut ipse numerus a per factores exprimitur, ita quoque summa ejus divisorum, per factores expressa, reperietur: quod in plerisque hujus generis quaestionibus resolvendis non parum habet utilitatis. Quo igitur facilius summae divisorum quorumvis numerorum inveniri atque ipsi per factores exprimi queant, in tabula annexa non solum omnium numerorum primorum millenario minorum, sed etiam eorum potestatum, quarum quidem usus occurrit, quantumque calculi molestia id permisit, summae divisorum exhibentur in factores resolutae: ita ut ope hujus tabulae omnium numerorum compositorum, nisi fuerint nimis magni, divisorum summae facile excerpi queant. Ita si propositus sit numerus $a = 7560$: hic numerus primo per factores primos exprimatur hoc modo $a = 2^3 . 3^3 . 5 . 7$. Deinde horum factorum singulorum summae divisorum in tabula quaerantur, quae erunt: $3 . 5$; $2^3 . 5$; $2 . 3$ et 2^3: hisque invicem multiplicatis prodibit summa divisorum numeri propositi $a = 7560$, quaesita $A = 2^7 . 3^2 . 5^2 = 28800$. Ex quo exemplo usus istius tabulae in summis divisorum quorumvis numerorum inveniendis abunde perspicitur.

§ 8. Hinc inventio numerorum perfectorum nulla laborat difficultate: cum enim numerus perfectus vocetur, qui aequalis summae suarum partium aliquotarum, si numerus perfectus ponatur $= a$, oportebit esse $a = A - a$, ideoque $A = 2a$. Jam numerus perfectus a vel est par, vel impar; priori casu ergo factorem habebit 2, ejusque quampiam dignitatem. Sit igitur $a = 2^n b$, erit $A = (2^{n+1} - 1) B$, ideoque $(2^{n+1} - 1) B = 2^{n+1} b$, unde fit $\frac{B}{b} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$. Cum igitur fractio $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$ ad minores numeros reduci nequeat, necesse est ut sit vel $b = 2^{n+1} - 1$, vel $b = (2^{n+1} - 1) c$. Prius autem fieri nequit, nisi sit $2^{n+1} - 1$ numerus primus, quia summa divisorum esse debet $= 2^{n+1}$, ideoque summa partium aliquotarum $= 1$: quoties vero est $2^{n+1} - 1$ numerus primus, toties posito $b = 2^{n+1} - 1$, erit $B = 2^{n+1}$; hincque numerus perfectus erit $a = 2^n (2^{n+1} - 1)$. Sin autem pro b sumeretur multiplum ipsius $2^{n+1} - 1$, puta $(2^{n+1} - 1) c$, ejus partes aliquotae forent $2^{n+1} - 1$ et c; unde omnium divisorum summa B certe non minor esset quam $2^{n+1} + c + b$; talis enim foret, si tam c quam $2^{n+1} - 1$ essent numeri primi. Fractio ergo $\frac{B}{b}$ non minor esset futura quam $\frac{2^{n+1} + c + b}{b}$, hoc est quam $\frac{2^{n+1}(1 + c)}{(2^{n+1} - 1) c}$, ob $b = (2^{n+1} - 1) c$. At fractio $\frac{2^{n+1}(1 + c)}{(2^{n+1} - 1) c}$ necessario major est quam $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$, unde pro numero b multiplum ipsius $2^{n+1} - 1$ accipi nequit. Quamobrem alii numeri perfecti pares reperiri non possunt, nisi qui contineantur in formula prius inventa $a = 2^n (2^{n+1} - 1)$, existente $2^{n+1} - 1$ numero primo; haecque est ipsa regula ab Euclide praescripta. Utrum autem praeter hos dentur numeri perfecti impares nec ne, difficillima est quaestio: neque quisquam adhuc talem numerum invenit, neque nullum omnino dari demonstravit. Sin autem hujusmodi numeri perfecti darentur, ii necessario in hac formula: $(4m + 1)^{4n + 1} xx$ continerentur, ubi $4m + 1$ denotat numerum primum et x numerum imparem.

§ 9. Longe difficilius autem reputatur problema de numeris amicabilibus inveniendis, in quo requiruntur bini numeri, quorum alter aequalis sit summae partium aliquotarum alterius. In hoc problemate solvendo etsi Schotenius summo studio est versatus, tamen plura quam tria hujusmodi numerorum paria non invenit, quae sunt:

220	et	284
17296	et	18416
9363584	et	9437056

atque methodus, qua est usus, ita est comparata, ut vix plures numeri satisfacientes ejus ope inveniri queant. Assumsit enim pro numeris amicabilibus has formulas generales $2^n x$ et $2^n yz$, in quibus numeros x, y et z ponit primos, sumtisque successive pro n numeris determinatis, tentando investigat casus, quibus numeri primi pro x, y, z substituti quaesito satisfaciant. Nemo autem putabit, omnes numeros amicabiles in his formulis contineri, quippe quod non solum a Schotenio non est demonstratum, sed etiam sequentes numeri amicabiles, quos equidem inveni, abunde declarant. Namque praeter tria illa paria modo mox explicando, sequentes adeptus sum numeros amicabiles:

$$4.5.131 \quad \text{et} \quad 4.17.43$$
$$4.5.251 \quad \text{et} \quad 4.13.107$$
$$16.17.5119 \quad \text{et} \quad 16.239.383$$
$$4.11.17.263 \quad \text{et} \quad 4.11.43.107$$
$$32.37.12671 \quad \text{et} \quad 32.227.2111$$
$$4.23.827 \quad \text{et} \quad 4.23.5.137$$

quin etiam numeri exhiberi possunt impares, quod quidem multo magis mirum videri queat, qui praescripta proprietate sint praediti, cujusmodi sunt:

$$3^2.7.13.5.17 \quad \text{et} \quad 3^2.7.13.107,$$
$$3^2.7^2.13.5.41 \quad \text{et} \quad 3^2.7^2.13.251,$$

ex quibus satis liquet numeros amicabiles multo esse copiosiores, quam numeros perfectos, qui in serie numerorum rarissime occurrunt.

§ 10. Hi autem numeri aliique satisfacientes non difficulter ope modi signandi ante expositi eliciuntur. Sint enim a et b bini numeri amicabiles quicunque, quoniam eorum summae divisorum sunt A et B, summaeque proinde partium aliquotarum $A-a$ et $B-b$; conditio horum numerorum praebet has aequationes: $A-a=b$ et $B-b=a$, unde fit $A=B=a+b$. Ambo ergo numeri amicabiles eandem habent divisorum summam, quae simul summae amborum numerorum est aequalis. Quo autem ad aequationes idoneas solutio perducatur, ponamus numeros amicabiles esse px et qy, existentibus x et y numeris primis, ita ut sit $a=px$ et $b=qy$, eritque

$$A=P(x+1) \quad \text{et} \quad B=Q(y+1): \quad \text{unde fit} \quad P(x+1)=Q(y+1)=px+qy.$$

Ponatur $P(x+1)=Q(y+1)=PQz$; erit $x+1=Qz$ et $y+1=Pz$, seu $x=Qz-1$ et $y=Pz-1$. Cum vero esse debeat $PQz=px+qy$, erit valoribus his pro x et y substitutis:

$$PQz=Qpz-p+Pqz-q, \quad \text{ideoque} \quad z=\frac{p+q}{Qp+Pq-PQ}.$$

Quare ut formulae assumtae px et qy praebeant numeros amicabiles, esse oportet:

$$x+1=\frac{Q(p+q)}{Qp+Pq-PQ} \quad \text{et} \quad y+1=\frac{P(p+q)}{Qp+Pq-PQ}.$$

Sit n maximus communis divisor numerorum px et qy, ponaturque $p=na$ et $q=nb$, ut sit $P=NA$ et $Q=NB$; et pro numeris amicabilibus has habebimus formulas

$$nax \quad \text{et} \quad nby,$$

in quibus x et y esse debent numeri primi, qui ex his aequationibus definiantur:

$$x+1=\frac{nB(a+b)}{Bna+Anb-NAB}, \quad y+1=\frac{nA(a+b)}{Bna+Anb-NAB},$$

Sumtis ergo pro a et b pro lubitu numeris determinatis erit:

$$x+1=\frac{(a+b)Bn}{(Ab+Ba)n-ABN} \quad \text{et} \quad y+1=\frac{(a+b)An}{(Ab+Ba)n-ABN},$$

ubi pro n ejusmodi sunt quaerendi numeri, ut x et y non solum fiant numeri integri, sed etiam primi.

§ 11. Cum autem hae formulae nimis sint generales, eas specialiores reddamus; ponamus ergo $a=1$, eritque $A=1$, et formulae numeros amicabiles exhibentes fient

$$nx \quad \text{et} \quad nby,$$

pro quibus x et y ex sequentibus aequationibus definiri debebunt

$$\frac{x+1}{B}=y+1=\frac{(1+b)n}{(B+b)n-BN}.$$

Sit praeterea b numerus primus, ut sit $B=b+1$; fie

$$\frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{(1+b)n}{(1+2b)n-(1+b)N}=\frac{(1+b)n}{(2n-N)b-(N-n)}.$$

Si jam insuper pro n potestas binarii accipiatur, ut sit $N=2n-1$, proveniet

$$\frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{(1+b)n}{b-(n-1)},$$

quae formulae eos praebebunt numeros amicabiles, qui per methodum **Schotenii** et **Cartesii** inveniuntur. Ponantur enim successive pro n potestates binarii, erit

$$\text{pro } n=2, \quad \frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{2(1+b)}{b-1},$$

$$\text{pro } n=4, \quad \frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{4(1+b)}{b-3},$$

$$\text{pro } n=8, \quad \frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{8(1+b)}{b-7},$$

etc.

Possunt vero pro n commode accipi alii numeri, ex quibus differentia $2n-N$ apte exprimatur; sic si capiatur $n=92$, erit $N=168$, $2n=184$, et $N-n=76$, unde fit:

$$\frac{x+1}{b+1}=y+1=\frac{92(1+b)}{16b-76}=\frac{23(1+b)}{4b-19}.$$

Hic si ponatur $b=5$, erit:

$$\frac{x+1}{6}=y+1=\frac{6.23}{1}=138 \quad \text{et} \quad x+1=828,$$

opportune autem hinc fit $y=137$ et $x=827$, uterque numerus primus, ita ut numeri amicabiles sint

$$92.827 \quad \text{et} \quad 92.5.137.$$

Similique modo ex his formulis alios numeros satisfacientes elicere licet.

§ 12. Jam non sit amplius $a=1$, sed denotet tam a quam b numerum quemcunque primum, eritque $A=a+1$ et $B=b+1$; atque formulae nax et nby dabunt numeros amicabiles, si sequentes aequationes pro x et y praebeant numeros primos:

$$\frac{x+1}{b+1}=\frac{y+1}{a+1}=\frac{n(a+b)}{(2ab+a+b)n-(ab+a+b+1)N},$$

seu $$\frac{x+1}{b+1}=\frac{y+1}{a+1}=\frac{n(a+b)}{(2n-N)ab-(N-n)(a+b)-N}.$$

Hic jam iterum, si pro n sumatur potestas binarii, ut sit $N=2n-1$, erit:

$$\frac{x+1}{b+1}=\frac{y+1}{a+1}=\frac{n(a+b)}{ab-(n-1)(a+b)-2n+1},$$

quae fractio ante omnia ad numerum integrum est reducenda, idoneis ad hoc pro a et b numeris primis assumendis; sic posito $n=4$, erit:

$$\frac{x+1}{b+1}=\frac{y+1}{a+1}=\frac{4(a+b)}{ab-3(a+b)-7}.$$

Ponatur $b=5$ et habebitur:

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y+1}{a+1}=\frac{4(a+5)}{2a-22}=\frac{2(a+5)}{a-11}.$$

Tententur jam successive varii valores pro a, uti ponatur $a=13$, erit:

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y+1}{14}=18, \quad \text{unde fit} \quad x=107 \quad \text{et} \quad y=251,$$

uterque primus; ita ut numeri amicabiles hinc prodeant $4.13.107$ et $4.5.251$. In iisdem formulis ponatur porro $a=17$, fietque

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y+1}{18}=\frac{2.22}{6} \quad \text{et} \quad x=43, \quad y=131,$$

iterum uterque primus, unde nascuntur numeri amicabiles $4.17.43$ et $4.5.131$. Possunt vero etiam pro n assumi, praeter potestates binarii, alii numeri convenientes, uti $n=44$, ut sit $N=84$; et $N:n=21:11$, unde fit:

$$\frac{x+1}{b+1}=\frac{y+1}{a+1}=\frac{11(a+b)}{ab-10(a+b)-21},$$

ubi positis $b=17$ et $a=43$, pro x et y numeri primi resultant.

§ 13. Possunt etiam pro a et b producta ex duobus pluribusve numeris primis substitui. Sint enim p et q numeri primi, ac ponatur $a=cp$ et $b=dq$, ut numeri amicabiles sint $ncpx$ et $ndqy$; ob $A=Cp+C$ et $B=Dq+D$, erit $Ab+Ba=(Cd+Dc)pq+Cdq+Dcp$ et

$$AB=CDpq+CDp+CDq+CD,$$

unde fiet: $$\frac{x+1}{D(q+1)}=\frac{y+1}{C(p+1)}=\frac{n(cp+dq)}{(Cd+Dc)npq+Dcnp+Cdnq-CDNpq-CDNp-CDNq-CDN},$$

ubi pro c et d numeros quoscunque, sive primos, sive compositos substituere licet. Sit exempli gratia $c=5$ et $d=11$, erit $C=6$ et $D=12$, numerique amicabiles: $5npx$ et $11nqy$, fietque:

$$\frac{x+1}{12(q+1)}=\frac{y+1}{6(p+1)}=\frac{n(5p+11q)}{126npq+60np+66nq-72Npq-72Np-72Nq-72N},$$

seu $$\frac{x+1}{2(q+1)}=\frac{y+1}{p+1}=\frac{n(5p+11q)}{(21n-12N)pq-(12N-10n)p-(12N-11n)q-12N},$$

quae expressio, ne fiat negativa ob $N>n$, necesse est ut sit $21n>12N$, seu $7n>4N$. Sit igitur primo $n=2$, erit $N=3$ atque

$$\frac{x+1}{2(q+1)}=\frac{y+1}{p+1}=\frac{5p+11q}{3pq-8p-14q-18}, \quad \text{ergo} \quad 3p>14 \quad \text{et} \quad p>5.$$

Sit $p=7$; erit $\frac{x+1}{2(q+1)}=\frac{y+1}{8}=\frac{35+11q}{7q-74}$, unde numerus integer oritur, si $q=61$, qui vero dat $y=15$, non primum. Quodsi vero ponatur $n=14$, ut sit $N=24$, prodibit:

$$\frac{x+1}{2(q+1)}=\frac{y+1}{p+1}=\frac{7(5p+11q)}{(3p-67)q-74p-144}$$

et facto $p=23$,
$$\frac{x+1}{q+1}=\frac{y+1}{12}=\frac{7(115+11q)}{q-923}.$$

Hoc igitur modo pluribus substitutionibus faciendis, plures numeri amicabiles erui poterunt.

§ 14. Quamquam autem hoc modo multo plures inveniri possunt numeri amicabiles, quam methodo a Cartesio et Schotenio usitata, tamen hic casui plurimum debetur, cum plures positiones plerumque frustra instituantur, antequam pro x et y numeri primi prodeant. Aliam igitur aperiam viam, ab hac ita diversam, ut inventio fortuita numerorum primorum non requiratur: quae derivatur ex ea numerorum amicabilium proprietate, qua uterque eandem habet divisorum summam. Facile autem est ope tabulae annexae hujusmodi numeros quot libuerit invenire, quorum summa divisorum sit eadem. Sint igitur v et u duo istiusmodi numeri, quorum utriusque summa divisorum sit eadem $=V$: quod si ergo esset quoque $V=v+u$, numeri v et u forent amicabiles. Sin autem haec proprietas locum non habeat, tum saepe eorum multipla reperire licebit, quae hac proprietate gaudeant. Ponamus ergo numeros amicabiles esse av et au, erunt utique divisorum summae AV et AV aequales, dummodo a respectu utriusque numeri v et u fuerit primus: reliquum ergo est, ut sit $AV=av+au$, seu $\frac{A}{a}=\frac{v+u}{V}$, ex qua aequatione idoneus valor pro a ita quaeri potest. Reducta fractione $\frac{v+u}{V}$ ad simplicissimam formam, necesse est, ut a per ejus denominatorem sit divisibilis: scilicet si fractio $\frac{v+u}{V}$ perducta sit ad $\frac{m}{n}$, ponatur $a=nb$; erit $A=NB$ et $\frac{A}{a}=\frac{NB}{nb}=\frac{m}{n}$, unde fit $\frac{B}{b}=\frac{m}{N}$. Similiter porro b divisibile erit per denominatorem hujus fractionis, atque operationem ut ante instituendo, tamdiu continuetur, donec solutio vel perspiciatur, vel impossibilis evadat. Notandum vero est pro a non solum multiplum numeri n, sed quoque ejus potestatis cujuspiam assumi posse: ita ut investigatio plerumque pluribus modis institui queat.

§ 15. Sumamus ergo pro v et u duos numeros, quorum eadem sit divisorum summa, ponaturque
$$v=71, \quad u=5.11, \quad \text{erit} \quad V=72=2^3.3^2,$$
ita, ut numeri amicabiles sint $71a$ et $55a$. Erit ergo $\frac{A}{a}=\frac{v+u}{V}=\frac{126}{72}=\frac{7}{4}$. Unde patet, numerum a factorem habere debere 4 seu 2^2, vel etiam altiorem potestatem ipsius binarii. Sit igitur
$$a=2^2b, \quad \text{erit} \quad A=7B \quad \text{et} \quad \frac{A}{a}=\frac{7B}{4b}=\frac{7}{4}, \quad \text{ideoque} \quad \frac{B}{b}=\frac{1}{1}.$$
Hinc igitur obtinetur $b=1$; ac propterea $a=4$, prodeuntque numeri amicabiles:
$$4.71=284 \quad \text{et} \quad 4.55=220.$$
Neque vero altior binarii potestas pro factore ipsius a assumi potest, posito enim
$$a=8b, \quad \text{fit} \quad A=15B \quad \text{et} \quad \frac{A}{a}=\frac{15B}{8b}=\frac{7}{4}, \quad \text{unde} \quad \frac{B}{b}=\frac{14}{15},$$

quae aequatio est impossibilis, cum nullus numerus ad suam divisorum summam rationem majoris inaequalitatis habere possit. Simili modo si statuatur:

$$v = 5.131 = 655, \quad u = 17.43 = 731, \quad \text{erit} \quad V = 2^3.3^2.11,$$

et numeri amicabiles $655a$ et $731a$; debebit autem esse

$$\frac{A}{a} = \frac{v+u}{V} = \frac{1386}{2^3.3^2.11} = \frac{77}{4.11} = \frac{7}{4},$$

unde ut ante fit $a = 4$; ita ut numeri amicabiles hinc reperiantur

$$4.655 = 2620 \quad \text{et} \quad 4.731 = 2924.$$

Pari modo cum sequentes numeri eandem divisorum summam habeant:

$$v = 5.251 \quad \text{et} \quad u = 13.107, \quad \text{erit enim} \quad V = 2^3.3^3.7,$$

unde si numeri amicabiles statuantur:

$$5.251a = 1255a \quad \text{et} \quad 13.107a = 1391a, \quad \text{erit} \quad \frac{A}{a} = \frac{2646}{2^3.3^3.7} = \frac{7}{4},$$

unde iterum fit $a = 4$, ita ut numeri amicabiles sint futuri:

$$5020 \quad \text{et} \quad 5564.$$

§ 16. In his exemplis inventio numeri a nihil habebat difficultatis; sumamus ergo exempla, ubi a plus laboris requirit. Statuatur

$$v = 827 \quad \text{et} \quad u = 5.137, \quad \text{ex utroque fit} \quad V = 2^2.3^2.23.$$

Quaeratur ergo multiplicator communis a, ut sit $\frac{A}{a} = \frac{v+u}{V} = \frac{1512}{2^2.3^2.23} = \frac{42}{23}$. Cum igitur 23 sit factor ipsius a, ponatur $a = 23b$, erit

$$A = 2^3.3B, \quad \text{ideoque} \quad \frac{A}{a} = \frac{2^3.3B}{23b} = \frac{2.3.7}{23}, \quad \text{ergo} \quad \frac{B}{b} = \frac{7}{4},$$

unde fit, ut in superioribus exemplis, $b = 4$ et $a = 4.23$, ideoque numeri amicabiles erunt:

$$4.23.827 = 76084 \quad \text{et} \quad 4.23.5.137 = 63020.$$

Deinde cum numeri 17.263 et 43.107 eandem habeant divisorum summam $2^4.3^3.11$, ponatur

$$v = 17.263 = 4471; \quad \text{et} \quad u = 43.107 = 4601, \quad \text{erit} \quad V = 2^4.3^3.11,$$

$$\text{atque} \quad \frac{A}{a} = \frac{9072}{2^4.3^3.11} = \frac{2^4.3^4.7}{2^4.3^3.11} = \frac{21}{11}.$$

Ponatur ergo $\begin{matrix} a = 11b \\ A = 12B \end{matrix}$, erit $\frac{A}{a} = \frac{12B}{11b} = \frac{21}{11}$ et $\frac{B}{b} = \frac{7}{4}$,

ideoque $b = 4$, $a = 4.11 = 44$: sicque numeri amicabiles erunt:

$$4.11.17.263 = 196724 \quad \text{et} \quad 4.11.43.107 = 202444.$$

Afferamus aliud exemplum, sitque

$$v = 5.17 = 85, \quad u = 107, \quad \text{erit} \quad V = 2^2.3^3, \quad \text{ergo} \quad \frac{A}{a} = \frac{192}{2^2.3^3} = \frac{16}{9}.$$

Ponatur ergo $\begin{matrix} a = 3^2 b \\ A = 13B \end{matrix}$, erit $\frac{A}{a} = \frac{13B}{9b} = \frac{16}{9}$, ergo $\frac{B}{b} = \frac{16}{13}$.

Fiat porro $b = 13c$, erit $B = 14C$ et $\frac{B}{b} = \frac{14C}{13c} = \frac{16}{13}$, ergo $\frac{C}{c} = \frac{8}{7}$, unde fit $c=7$, $b=7.13$ et $a=3^2.7.13$. Quare hinc numeri amicabiles nascuntur:

$$3^2.7.13.85=69615 \quad \text{et} \quad 3^2.7.13.107=87633.$$

Si posuissemus $a=3^3 b$ et $A=2^3.5B$, prodiisset $\frac{B}{b}=\frac{6}{5}$, unde foret $b=5$ et $a=3^3.5$; at cum a ad utrumque numerum v et u debeat esse primus, iste valor ob factorem 5 cum v communem, est inutilis.

§ 17. Evolvamus adhuc exemplum ultimum, quoniam in eo quaedam artificia notanda occurrunt, quae in aliis similibus problematibus solvendis utilitatem habere possunt. Assumamus ergo pro v et u sequentes numeros, qui communem habent divisorum summam:

$$v=5.41=205 \quad \text{et} \quad u=251, \quad \text{eritque} \quad V=2^2.3^2.7.$$

Hinc ergo nascuntur numeri amicabiles

$$205a \quad \text{et} \quad 251a, \quad \text{si fuerit} \quad \frac{A}{a}=\frac{456}{2^2.3^2.7}=\frac{38}{3.7}.$$

Ergo numerus a divisores habebit 3 et 7. Ponatur ergo:

$$\begin{matrix} a=3b \\ A=4B \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{B}{b}=\frac{19}{2.7},$$

quae aequatio jam est impossibilis, cum 19 sit minor quam summa divisorum ipsius 2.7, quae est 24. Numeri autem multipli ipsius 2.7 multo adhuc minorem tenent rationem ad summas suorum divisorum. Ponamus ergo:

$$\begin{matrix} a=3^2 b \\ A=13B \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{B}{b}=\frac{2.3.19}{7.13},$$

ideoque b factores habebit 7 et 13. Ponatur nunc

$$\begin{matrix} b=7c \\ B=8C \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{C}{c}=\frac{3.19}{4.13},$$

quae aequatio iterum est impossibilis, ob $3.19<$ summa divisorum ipsius 4.19. Quare ulterius tentetur haec positio:

$$\begin{matrix} b=7^2 c \\ B=3.19C \end{matrix}, \quad \text{erit} \quad \frac{C}{c}=\frac{14}{13}, \quad \text{unde fit} \quad c=13;$$

hincque $b=7^2.13$ et $a=3^2.7^2.13$. Numeri ergo amicabiles ex hac positione orti erunt:

$$3^2.7^2.13.205=1175265 \quad \text{atque} \quad 3^2.7^2.13.251=1438983.$$

His igitur praeceptis observatis non difficile erit tam hoc problema de numeris amicabilibus quam alia similia copiosius resolvere.

Sequitur tabula exhibens summas divisorum numerorum primorum, millenario inferiorum, eorumque potestatum:

Num.	Summa divisorum.
2	3.
2^2	7.
2^3	3. 5.
2^4	31.
2^5	3^2. 7.
2^6	127.
2^7	3. 5. 17.
2^8	7. 73.
2^9	3. 11. 31
2^{10}	23. 89.
2^{11}	3^2. 5. 7. 13.
2^{12}	8191.
2^{13}	3. 43. 127.
2^{14}	7. 31. 151.
2^{15}	3. 5. 17. 257.
2^{16}	131071.
2^{17}	3^3. 7. 19. 73.
2^{18}	524287.
2^{19}	3. 5^2. 11. 31. 41.
2^{20}	7^2. 127. 337.
2^{21}	3. 23. 89. 683.
2^{22}	47. 178481.
2^{23}	3^2. 5. 7. 13. 17. 241.
2^{24}	31. 601. 1801.
2^{25}	3. 2731. 8191.
2^{26}	7. 73. 262657.
2^{27}	3. 5. 29. 43. 113. 127.
2^{28}	233. 1103. 2089.
2^{29}	3^2. 7. 11. 31. 151. 331.
2^{30}	2147483647.
2^{31}	3. 5. 17. 257. 65537.
2^{32}	7. 23. 89. 599479.
2^{33}	3. 43691. 131071.
2^{34}	31. 71. 127. 122921.
2^{35}	3^3.5.7.13.19.37.73.109.
2^{36}	223. 616318177.
3	2^2.
3^2	13.

Num.	Summa divisorum.
3^3	2^3. 5.
3^4	11^2.
3^5	2^2. 7. 13.
3^6	1093.
3^7	2^4. 5. 41.
3^8	13. 757.
3^9	2^2. 11^2. 61.
3^{10}	23. 3851.
3^{11}	2^3. 5. 7. 13. 73.
3^{12}	797161.
3^{13}	2^2. 547. 1093.
3^{14}	11^2. 13. 4561.
3^{15}	2^5. 5. 17. 41. 193.
5	2. 3.
5^2	31.
5^3	2^2. 3. 13.
5^4	11. 71.
5^5	2. 3^2. 7. 31.
5^6	19531.
5^7	2^3. 3. 13. 313.
5^8	19. 31. 829.
5^9	2. 3. 11. 71. 521.
7	2^3.
7^2	3. 19.
7^3	2^4. 5^2.
7^4	2801.
7^5	2^3. 3. 19. 43.
7^6	29. 4733.
7^7	2^5. 5^2. 1201.
7^8	3^2. 19. 37. 1063.
7^9	2^3. 11. 191. 2801.
7^{10}	329554457.
11	2^2. 3.
11^2	7. 19.
11^3	2^3. 3. 61.
11^4	5. 3221.
11^5	2^2. 3^2. 7. 19. 37.

Num.	Summa divisorum.
11^6	43. 45319.
11^7	2^4. 3. 61. 7321.
11^8	7. 19. 1772893.
11^9	2^2. 3. 5. 3221. 13421.
13	2. 7.
13^2	3. 61.
13^3	2^2. 5. 7. 17.
13^4	30941.
13^5	2. 3. 7. 61. 157.
13^6	5229043.
13^7	2^3. 5. 7. 17. 14281.
17	2. 3^2.
17^2	307.
17^3	2^2. 3^2. 5. 29.
17^4	88741.
17^5	2. 3^3. 7. 13. 307.
19	2^2. 5.
19^2	3. 127.
19^3	2^3. 5. 181.
19^4	151. 911.
19^5	2^2. 3. 5. 7^3. 127.
23	2^3. 3.
23^2	7. 79.
23^3	2^4. 3. 5. 53.
23^4	292561.
29	2. 3. 5.
29^2	13. 67.
29^3	2^2. 3. 5. 421.
31	2^5.
31^2	3. 331.
31^3	2^6. 13. 37.
37	2. 19.
37^2	3. 7. 67.
37^3	2^2. 5. 2603.

Num.	Summa divisorum	Num.	Summa divisorum	Num.	Summa divisorum
41	2. 3. 7.	89	2. 3^2. 5.	149	2. 3. 5^2.
41^2	1723.	89^2	8011.	149^2	7. 31. 103.
41^3	2^2. 3. 7. 29^2.	89^3	2^2. 3^2. 5. 17. 233.	149^3	2^2. 3. 5^2. 11. 101.
43	2^2. 11.	97	2. 7^2.	151	2^3. 19.
43^2	3. 631.	97^2	3. 3169.	151^2	3. 7. 1093.
43^3	2^3. 5^2. 11. 37.	97^3	2^2. 5, 7^2. 941.	151^3	2^4. 13. 19. 877.
47	2^4. 3.	101	2. 3. 17.	157	2. 79.
47^2	37. 61.	101^2	10303.	157^2	3. 8269.
47^3	2^5. 3. 5. 13. 17.	101^3	2^2. 3. 17. 5101.	157^3	2^2. 5^2. 17. 29. 79.
53	2. 3^3.	103	2^3. 13.	163	2^2. 41.
53^2	7. 409.	103^2	3. 3571.	163^2	3. 7. 19. 67.
53^3	2^2. 3^3. 5. 281.	103^3	2^4. 5. 13. 1061.	163^3	2^3. 5. 41. 2657.
59	2^2. 3. 5.	107	2^2. 3^3.	167	2^3. 3. 7.
59^2	3541.	107^2	7. 13. 127.	167^2	28057.
59^3	2^3. 3. 5. 1741.	107^3	2^3. 3^3. 5^2. 229.	167^3	2^4. 3. 5. 7. 2789.
61	2. 31.	109	2. 5. 11.	173	2. 3. 29.
61^2	3. 13. 97.	109^2	3. 7. 571.	173^2	67. 449.
61^3	2^2. 31. 1861.	109^3	2^2. 5. 11. 13. 457.	173^3	2^2. 3. 5. 29. 41. 73.
67	2^2. 17.	113	2. 3. 19.	179	2^2. 3^2. 5.
67^2	3. 7^2. 31.	113^2	13. 991.	179^2	7. 4603.
67^3	2^3. 5. 17. 449.	113^3	2^2. 3. 5. 19. 1277.	179^3	2^3. 3^2. 5. 37. 433.
71	2^3. 3^2.	127	2^7.	181	2. 7. 13.
71^2	5113.	127^2	3. 5419.	181^2	3. 79. 139.
71^3	2^4. 3^2. 2521.	127^3	2^8. 5. 1613.	181^3	2^2. 7. 13. 16381.
73	2. 37.	131	2^2. 3. 11.	191	2^6. 3.
73^2	3. 1801.	131^2	17293.	191^2	7. 13^2. 31.
73^3	2^2. 5. 13. 37. 41.	131^3	2^3. 3. 11. 8581.	191^3	2^7. 3. 17. 29. 37.
79	2^4. 5.	137	2. 3. 23.	193	2. 97.
79^2	3. 7^2. 43.	137^2	7. 37. 73.	193^2	3. 7. 1783.
79^3	2^5. 5. 3121.	137^3	2^2. 3. 5. 23. 1877.	193^3	2^2. 5^3. 97. 149.
83	2^2. 3. 7.	139	2^2. 5. 7.	197	2. 3^2. 11.
83^2	19. 367.	139^2	3. 13. 499.	197^2	19. 2053.
83^3	2^3. 3. 5. 7. 13. 53.	139^3	2^3. 5. 7. 9661.	197^3	2^2. 3^2. 5. 11. 3881.

Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
199	$2^3. 5^2.$	269	$2. 3^3. 5.$	337	$2. 13^2.$
199^2	$3. 13267.$	269^2	$13. 37. 151.$	337^2	$3. 43. 883.$
199^3	$2^4. 5^2. 19801.$	269^3	$2^2. 3^3. 5. 97. 373.$	337^3	$2^2. 5. 13^2. 41. 277.$
211	$2^2. 53.$	271	$2^4. 17.$	347	$2^2. 3. 29.$
211^2	$3. 13. 31. 37.$	271^2	$3. 24571.$	347^2	$7. 13. 1327.$
211^3	$2^3. 53. 113. 197.$	271^3	$2^5. 17. 36721.$	347^3	$2^3. 3. 5. 29. 12041.$
223	$2^5. 7.$	277	$2. 139.$	349	$2. 5^2. 7.$
223^2	$3. 16651.$	277^2	$3. 7. 19. 193.$	349^2	$3. 19. 2143.$
223^3	$2^6. 5. 7. 4973.$	277^3	$2^2. 5. 139. 7673.$	349^3	$2^2. 5^2. 7. 60901.$
227	$2^2. 3. 19.$	281	$2. 3. 47.$	353	$2. 3. 59.$
227^2	$73. 709.$	281^2	$109. 727.$	353^2	$19. 6577.$
227^3	$2^3. 3. 5. 19. 5153.$	281^3	$2^2. 3. 13. 47. 3037.$	353^3	$2^2. 3. 5. 17. 59. 733.$
229	$2. 5. 23.$	283	$2^2. 71.$	359	$2^3. 3^2. 5.$
229^2	$3. 97. 181.$	283^2	$3. 73. 367.$	359^2	$7. 37. 499.$
229^3	$2^2. 5. 13. 23. 2017.$	283^3	$2^2. 5. 71. 8009.$	359^3	$2^4. 3^2. 5. 13. 4957.$
233	$2. 3^2. 13.$	293	$2. 3. 7^2.$	367	$2^4. 23.$
233^2	$7. 7789.$	293^2	$86143.$	367^2	$3. 13. 3463.$
233^3	$2^2. 3^2. 5. 13. 61. 89.$	293^3	$2^2. 3. 5^2. 7^2. 17. 101.$	367^3	$2^5. 5. 23. 13469.$
239	$2^4. 3. 5.$	307	$2^2. 7. 11.$	373	$2. 11. 17.$
239^2	$19. 3019.$	307^2	$3. 43. 733.$	373^2	$3. 7^2. 13. 73.$
239^3	$2^5. 3. 5. 13^4.$	307^3	$2^3. 5^3. 7. 11. 13. 29.$	373^3	$2^2. 5. 11. 17. 13913.$
241	$2. 11^2.$	311	$2^3. 3. 13.$	379	$2^2. 5. 19.$
241^2	$3. 19441.$	311^2	$19. 5107.$	379^2	$3. 61. 787.$
241^3	$2^2. 11^2. 113. 257.$	311^3	$2^4. 3. 13. 137. 353.$	379^3	$2^3. 5. 19. 71821.$
251	$2^2. 3^2. 7.$	313	$2. 157.$	383	$2^7. 3.$
251^2	$43. 1471.$	313^2	$3. 181^2.$	383^2	$147073.$
251^3	$2^3. 3^2. 7. 17^2. 109.$	313^3	$2^2. 5. 97. 101. 157.$	383^3	$2^8. 3. 5. 14669.$
257	$2. 3. 43.$	317	$2. 3. 53.$	389	$2. 3. 5. 13.$
257^2	$61. 1087.$	317^2	$7. 14401.$	389^2	$7. 21673.$
257^3	$2^2. 3. 5^2. 43. 1321.$	317^3	$2^2. 3. 5. 13. 53. 773.$	389^3	$2^2. 3. 5. 13. 29. 2609.$
263	$2^3. 3. 11.$	331	$2^2. 83.$	397	$2. 199.$
263^2	$7^2. 13. 109.$	331^2	$3. 7. 5233.$	397^2	$3. 31. 1699.$
263^3	$2^4. 3. 5. 11. 6917.$	331^3	$2^3. 29. 83. 1889.$	397^3	$2^2. 5. 199. 15761.$

Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
401	2. 3. 67.	463	2^4. 29.	547	2^2. 137.
401^2	7. 23029.	463^2	3. 19. 3769.	547^2	3. 163. 613.
401^3	2^2. 3. 37. 41. 53. 67.	463^3	2^5. 5. 13. 17. 29. 97.	547^3	2^3. 5. 137. 29921.
409	2. 5. 41.	467	2^2. 3^2. 13.	557	2. 3^2. 31.
409^2	3. 55897.	467^2	19. 11503.	557^2	7^2. 6343.
409^3	2^2. 5. 41. 83641.	467^3	2^3. 3^2. 5. 13. 113. 193.	557^3	2^2. 3^2. 5^3. 17. 31. 73.
419	2^2. 3. 5. 7.	479	2^5. 3. 5.	563	2^2. 3. 47.
419^2	13. 13537.	479^2	43. 5347.	563^2	31. 10243.
419^3	2^3. 3. 5. 7. 41. 2141.	479^3	2^6. 3. 5. 89. 1289.	563^3	2^3. 3. 5. 29. 47. 1093.
421	2. 211.	487	2^3. 61.	569	2. 3. 5. 19.
421^2	3. 59221.	487^2	3. 7. 11317.	569^2	7^2. 6619.
421^3	2^2. 13. 17. 211. 401.	487^3	2^4. 5. 37. 61. 641.	569^3	2^2. 3. 5. 19. 161881.
431	2^4. 3^3.	491	2^2. 3. 41.	571	2^2. 11. 13.
431^2	7. 67. 397.	491^2	37. 6529.	571^2	3. 7. 103. 151.
431^3	2^5. 3^3. 293. 317.	491^3	2^3. 3. 41. 149. 809.	571^3	3^3. 11. 13. 163041.
433	2. 7. 31.	499	2^2. 5^3.	577	2. 17^2.
433^2	3. 37. 1693.	499^2	3. 7. 109^2.	577^2	3. 19. 5851.
433^3	2^2. 5. 7. 31. 18749.	499^3	2^3. 5^3. 13. 61. 157.	577^3	2^2. 5. 13^2. 17^2. 197.
439	2^3. 5. 11.	503	2^3. 3^2. 7.	587	2^2. 3. 7^2.
439^2	3. 31^2. 67.	503^2	13. 19501.	587^2	547. 631.
439^3	2^4. 5. 11. 173. 557.	503^3	2^4. 3^2. 5. 7. 25301.	587^3	2^3. 3. 5. 7^2. 34457.
443	2^2. 3. 37.	509	2. 3. 5. 17.	593	2. 3^3. 11.
443^2	7. 28099.	509^2	43. 6037.	593^2	163. 2161.
443^3	2^3. 3. 5^4. 37. 157.	509^3	2^2. 3. 5. 17. 281. 461.	593^3	2^2. 3^3. 5^2. 11. 13. 541.
449	2. 3^2. 5^2.	521	2. 3^2. 29.	599	2^3. 3. 5^2.
449^2	97. 2083.	521^2	31^2. 283.	599^2	7. 51343.
449^3	2^2. 3^2. 5^2. 100801.	521^3	2^2. 3^2. 29. 135721.	599^3	2^4. 3. 5^2. 17. 61. 173.
457	2. 229.	523	2^2. 131.	601	2. 7. 43.
457^2	3. 7. 9967.	523^2	3. 13. 7027.	601^2	3. 13. 9277.
457^3	2^2. 5^2. 229. 4177.	523^3	2^3. 5. 7. 131. 1609.	601^3	2^2. 7. 43. 313. 577.
461	2. 3. 7. 11.	541	2. 271.	607	2^5. 19.
461^2	373. 571.	541^2	3. 7. 13963.	607^2	3. 13. 9463.
461^3	2^2. 3. 7. 11106261.	541^3	2^2. 13. 271. 11257.	607^3	2^6. 5^2. 19. 7369.

Num.	Summa divisorum	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
613	2. 307.	677	2. 3. 113.	757	2. 379.
613^2	3. 125461.	677^2	459007.	757^2	3. 13. 14713.
613^3	2^2. 5. 53. 307. 709.	677^3	2^2. 3. 5. 113. 45833.	757^3	2^2. 5^2. 73. 157. 379.
617	2. 3. 103.	683	2^2. 3^2. 19.	761	2. 3. 127.
617^2	97. 3931.	683^2	7. 66739.	761^2	579883.
617^3	2^2. 3. 5. 103. 38069.	683^3	2^3. 3^2. 5. 19. 46649.	761^3	2^2. 3. 17. 127. 17033.
619	2^2. 5. 31.	691	2^2. 173.	769	2. 5. 7. 11.
619^2	3. 19. 6733.	691^2	3. 19. 8389.	769^2	3. 31. 6367.
619^3	2^3. 5. 13. 31. 14737.	691^3	2^3. 173. 193. 1237.	769^3	2^2. 5. 7. 11. 71. 17393.
631	2^3. 79.	701	2. 3^3. 13.	773	2. 3^2. 43.
631^2	3. 307. 433.	701^2	492103.	773^2	598303.
631^3	2^4. 79. 199081.	701^3	2^2. 3^3. 13. 17. 97. 149.	773^3	2^2. 3^2. 5. 43. 59753.
641	2. 3. 107.	709	2. 5. 71.	787	2^2. 197.
641^2	7. 58789.	709^2	3. 7. 23971.	787^2	3. 37^2. 151.
641^3	2^2. 3. 107. 205441.	709^3	2^2. 5. 37. 71. 6793.	787^3	2^3. 5. 197. 241. 257.
643	2^2. 7. 23.	719	2^4. 3^2. 5.	797	2. 3. 7. 19
643^2	3. 97. 1423.	719^2	487. 1063.	797^2	157. 4051.
643^3	2^3. 5^2. 7. 23. 8269.	719^3	2^5. 3^2. 5. 53. 4877.	797^3	2^2. 3. 5. 7. 19. 63521.
647	2^3. 3^4.	727	2^3. 7. 13.	809	2. 3^4. 5.
647^2	211. 1987.	727^2	3. 176419.	809^2	7. 13. 19. 379.
647^3	2^4. 3^4. 5. 41. 1021.	727^3	2^4. 5. 7. 13. 17. 3109.	809^3	2^2. 3^4. 5. 229. 1429.
653	2. 3. 109.	733	2. 367.	811	2. 7. 29.
653^2	7. 13^2. 19^2.	733^2	3. 19. 9439.	811^2	3. 31. 73. 97.
653^3	2^2. 3. 5. 109. 42641.	733^3	2^2. 5. 13. 367. 4133.	811^3	2^3. 7. 13. 29. 41. 617.
659	2^2. 3. 5. 11.	739	2^2. 5. 37.	821	2. 3. 137.
659^2	13. 33457.	739^2	3. 7. 26041.	821^2	7. 229. 421.
659^3	2^3. 3. 5. 11. 17. 53. 241.	739^3	2^3. 5. 37. 273061.	821^3	2^2. 3. 137. 337021.
661	2^2. 331.	743	2^3. 3. 31.	823	2^3. 103.
661^2	3. 145861.	743^2	552793.	823^2	3. 7. 43. 751.
661^3	2^2. 331. 218461.	743^3	2^4. 3. 5^2. 31. 61. 181.	823^3	2^4. 5. 103. 67733.
673	2^2. 337.	751	2^4. 47.	827	2^2. 3^2. 23.
673^2	3. 151201.	751^2	3. 7. 26893.	827^2	684757.
673^3	2^2. 5. 337. 45293.	751^3	2^5. 47. 282001.	827^3	2^3. 3^2. 5. 13. 23. 5261.

*

Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.	Num.	Summa divisorum.
829	2. 5. 83.	883	2^2. 13. 17.	947	2^2. 3. 79.
829^2	3. 211. 1087.	883^2	3. 260191.	947^2	7. 277. 463.
829^3	2^2. 5. 17^2. 29. 41. 83.	883^3	2^3. 5. 13. 17. 77969.	947^3	2^3. 3. 5. 79. 89681.
839	2^3. 3. 5. 7.	887	2^3. 3. 37.	953	2. 3^2. 53.
839^2	704761.	887^2	13. 60589.	953^2	181. 5023.
839^3	2^4. 3. 5. 7. 109. 3229	887^3	2^4. 3. 5. 29. 37. 2713.	953^3	2^2. 3^2. 5. 53. 90821.
853	2. 7. 61.	907	2^2. 227.	967	2^3. 11^2.
853^2	3. 43. 5647.	907^2	3. 7. 39217.	967^2	3. 67. 4657.
853^3	2^2. 5. 7. 13. 29. 61. 193.	907^3	2^3. 5^2. 227. 16453.	967^3	2^4. 5. 11^2. 13. 7193.
857	2. 3. 11. 13.	911	2^4. 3. 19.	971	2^2. 3^5.
857^2	735307.	911^2	830833.	971^2	13. 79. 919.
857^3	2^2. 3. 5^2. 11. 13. 37. 397.	911^3	2^5. 3. 19. 29. 41. 349.	971^3	2^3. 3^5. 197. 2393.
859	2^2. 5. 43.	919	2^3. 5. 23.	977	2. 3. 163.
859^2	3. 246247.	919^2	3. 7. 13. 19. 163.	977^2	7. 136501.
859^3	2^3. 5. 43. 137. 2693.	919^3	2^4. 5. 23. 37. 101. 113.	977^3	2^2. 3. 5. 53. 163. 1801.
863	2^5. 3^3.	929	2. 3. 5. 31.	983	2^3. 3. 41.
863^2	7^2. 15217.	929^2	157. 5503.	983^2	103. 9391.
863^3	2^6. 3^3. 5. 13. 17. 337.	929^3	2^2. 3. 5. 31. 431521.	983^3	2^4. 3. 5. 13. 41. 7433.
877	2. 439.	937	2. 7. 67.	991	2^5. 31.
877^2	3. 7. 37. 991.	937^2	3. 292969.	991^2	3. 7. 13^2. 277.
877^3	2^2. 5. 439. 76913.	937^3	2^2. 5. 7. 67. 87797.	991^3	2^6. 31. 491041.
881	2. 3^2. 7^2.	941	2. 3. 157.	997	2. 499.
881^2	19. 40897.	941^2	811. 1093.	997^2	3. 13. 31. 823.
881^3	2^2. 3^2. 7^2. 388081.	941^3	2^2. 3. 13. 157. 34057.	997^3	2^2. 5. 499. 99401.