RECHERCHES GÉNÉRALES
SUR
LA MORTALITÉ ET LA MULTIPLICATION
DU GENRE HUMAIN.

PAR M. EULER.

I.

Les régistres des naissences & des morts à chaque âge, qu'on publie en plusieurs endroits tous les ans, fournissent tant de questions différentes sur la mortalité & la multiplication du genre humain, qu'il seroit trop long de les rapporter toutes. Or les unes dépendent pour la plûpart en sorte des autres, qu'en ayant développé une ou deux, toutes les autres se trouvent pareillement déterminées. Comme les solutions doivent être tirées des régistres mentionnés, il est à remarquer, que ces régistres différent beaucoup selon la diversité des villes, villages & provinces, où ils ont été dressés: & par la même raison les solutions de toutes ces questions se trouvent fort différentes selon les régistres sur lesquels elles sont fondées. C'est pourquoi je me propose de traiter ici en géneral la plupart de ces questions sans me borner aux résultats que les régistres d'un certain endroit fournissent: & ensuite il sera aisé de faire l'application à chaque endroit qu'on voudra.

2. Or j'observe d'abord, que toutes ces questions prises en général dépendent de deux hypotheses; lesquelles étant bien fixées il est aisé d'en tirer la solution de toutes. Je nommerai la premiere l'hypothese de la mortalité par laquelle on détermine, combien d'un certain nombre d'hommes, qui sont nés à la fois, seront encore en vie après chaque nombre d'années écoulées. Ici la considération de la multiplication n'entre point du tout en compte, & partant il faut consti-

conſtituer la ſeconde hypotheſe, que je nommerai celle de la multiplication; & par laquelle je marque de combien le nombre de tous les hommes eſt augmenté ou diminué pendant le cours d'un an. Cette hypotheſe dépend donc de la quantité des mariages & de la *fécondité*, pendant que la premiere eſt fondée ſur la vitalité ou le pouvoir de vivre, qui eſt propre aux hommes.

I. HYPOTHESE

DE LA MORTALITÉ.

3. Pour la premiere hypotheſe, concevons un nombre quelconque N d'enfans, qui ſoient nés en même tems; & je marquerai le nombre de ceux qui ſeront encore en vie au bout d'un an par (1) N, de ceux qui y ſeront encore au bout de deux ans par (2) N, de trois ans par (3) N, de quatre ans par (4) N, & ainſi de ſuite. Ce ſont des ſignes généraux que j'emploie pour marquer, comment les nombre des hommes nés en même tems décroit ſucceſſivement; qui auront pour chaque climat & chaque maniere de vivre des valeurs particulieres. Cependant on peut remarquer que les nombres indiqués par (1), (2), (3), (4), (5), &c. conſtituent une progreſſion décroiſſante de fractions, dont la plus grande (1) eſt moindre que l'unité; & quand on continue ces termes au de là de 100, ils décroitront ſi fort, qu'ils évanouiſſent presque entierement. Car, ſi de 100 millions d'hommes aucun n'atteint l'age de 125 ans, il faut que le terme (125) ſoit moindre que $\frac{1}{100000000}$.

4. Ayant établi pour un certain lieu par un aſſez grand nombre d'obſervations les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. on peut réſoudre quantité de queſtions qu'on propoſe ordinairement ſur la probabilité de la vie humaine. D'abord il eſt évident, ſi le nombre des enfans nés en même tems eſt $=$ N, que ſelon la probabilité il en mourra tous les ans autant que cette table en marque:

 depuis

depuis	à		il en mourra
o ans - -	1	- - - - -	$N - (1)N$,
1 —	2	- - - - -	$(1)N - (2)N$,
2 —	3	- - - - -	$(2)N - (3)N$,
3 —	4	- - - - -	$(3)N - (4)N$,
4 —	5	- - - - -	$(4)N - (5)N$,

&c.

Et comme de ce nombre N il y aura encore probablement en vie $(n)N$ au bout de n ans, il faut que le nombre des morts avant ce terme de n ans soit $= N - (n)N$. Après cette remarque je donnerai la ſolution des queſtions ſuivantes.

I. QUESTION.

5. *Un certain nombre d'hommes dont tous ſoient du même âge, étant donné, trouver combien en ſeront probablement encore en vie après un certain nombre d'années.*

Suppoſons qu'il y ait M hommes, qui ayent le même âge de m ans, & qu'on demande, combien en vivront probablement encore après n ans? Qu'on poſe $M = (m)N$ pour avoir $N = \frac{M}{(m)}$, où N marque le nombre de tous les enfans nés en même tems, dont il reſte encore en vie M après m ans. Or de ce même nombre ſeront probablement encore en vie $(m + n)N$ après $m + n$ ans depuis leur naiſſance, & partant après n ans depuis le tems propoſé. Donc le nombre cherché dans la queſtion eſt $= \frac{(m + n)}{(m)} M$; ou après n ans il y aura probablement encore autant de vivans de M hommes, qui ont tous à préſent m ans.

Donc

Donc il eſt probable que du nombre d'hommes M âgés tous de m ans, il en mourra $1 - \frac{(m + n)}{(m)}$, avant qu'il s'en écoulent n ans.

II. Question.

6. *Trouver la probabilité qu'un homme d'un certain age ſoit encore en vie après un certain nombre d'années.*

Que l'homme en queſtion ſoit agé de m ans, & qu'on cherche la probabilité que cet homme ſoit encore en vie au bout de n ans. Concevons M homme du même âge, & puisque, après n ans, il y en aura probablement encore vivans $\frac{(m + n)}{(m)}$ M, la probabilité que l'homme propoſé ſe trouve dans ce nombre ſera $= \frac{(m + n)}{(m)}$.

Donc la probabilité que cet homme vienne à mourir avant le bout de ces n ans, eſt $1 - \frac{(m + n)}{(m)}$. Et partant l'eſpérance, que cet homme peut avoir de ne pas mourir dans l'intervalle des $(m + n)$ années prochaines, eſt à la crainte de mourir dans ce même intervalle comme $(m + n)$ à $(m) - (m + n)$. Donc l'eſpérance ſurpaſſera la crainte ſi $(m + n) > \frac{1}{2}(m)$; & la crainte ſera plus fondée ſi $(m + n) < \frac{1}{2}(m)$. Or la crainte égalera l'eſpérance, ſi $(m + n) = \frac{1}{2}(m)$.

III. Question.

7. *On demande la probabilité, qu'un homme d'un certain âge mourra dans le cours d'une année donnée.*

Que l'homme en queſtion ſoit âgé de m ans, mais qu'il meure avant qu'il parvienne à l'âge de $n + 1$ ans. Pour trouver cette probabilité, concevons un grand nombre d'hommes M du même âge,

& ayant $M = (m)N$, & $N = \frac{M}{(m)}$, il y aura $\frac{(n)}{(m)}$ M hommes, qui atteignent l'âge de n ans, & $\frac{(n+1)}{(m)}$ M, qui atteignent celui de $n + 1$ ans: il en mourra donc probablement dans le cours de cette année $\frac{(n) - (n+1)}{(m)}$ M; & partant la probabilité que l'homme proposé se trouve dans ce nombre sera $= \frac{(n) - (n+1)}{(m)}$.

De là il est évident, pour que ce même homme meure entre l'année $n + \nu$ de son âge, la probabilité sera $= \frac{(n) - (n+\nu)}{(m)}$.

Or, pour que cet homme meure un jour marqué de l'année proposée, la probabilité sera $= \frac{(n) - (n+1)}{365\,(m)}$.

Si la question est d'un enfant nouvellement né, on n'a qu'à écrire 1 au lieu de la fraction (m).

IV. QUESTION.

8. *Trouver le terme, auquel un homme d'un âge donné peut espérer de parvenir, de sorte qu'il est également probable qu'il meure avant ce terme qu'après.*

Soit l'âge de l'homme en question de m ans, & celui qu'il peut espérer d'attendre de z ans, qu'il s'agit de trouver. Or la probabilité qu'il parvienne à cet âge étant $= \frac{(z)}{(m)}$, la probabilité qu'il meure avant ce terme sera $= 1 - \frac{(z)}{(m)}$. Donc, puisque l'une & l'autre probabilité doit être la même, nous aurons cette équation $\frac{(z)}{(m)} = 1 - \frac{(z)}{(m)}$, & partant $(z) = \frac{1}{2}(m)$, dont il est aisé de

trouver

trouver le nombre z, dès qu'on a déterminé par les obſervations les valeurs de toutes ces fractions:

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5),\quad (6),\quad \&c.$$

car on verra d'abord laquelle (z) ſera la moitié de la propoſée (m).

Ayant trouvé ce nombre z, on nomme l'intervalle $z - m$ la force de la vie d'un homme de m ans.

V. Question.

9. *Déterminer les rentes viageres, qu'il eſt juſte de payer à des hommes d'un âge quelconque tous les ans, jusqu'à leur mort, pour une ſomme qu'ils auront avancée d'abord.*

Concevons M hommes, qui ayent tous le même âge de m ans, & que chacun paye d'abord la ſomme a; ce qui fournira un fond $= Ma$. Soit x la ſomme qu'on doit payer à chacun tous les ans, tant qu'il eſt en vie, & après un an le fond doit payer $\frac{(m+1)}{(m)} Mx$, après deux ans $\frac{(m+2)}{(m)} Mx$, après trois $\frac{(m+3)}{(m)} Mx$, & ainſi de ſuite. Or, comptant que le fond ſoit placé à 5 pour cent, une ſomme S payable après n ans ne vaut à préſent que $\left[\frac{20}{21}\right]^n S$: mais, pour rendre notre détermination plus générale, ſuppoſons qu'une ſomme S croiſſe par les intérêts dans un an à λS, & $\frac{1}{\lambda}$ ſera ce que nous avons marqué par $\frac{20}{21}$, & une ſomme S payable au bout de n ans ne vaudra à préſent que $S : \lambda^n$. De là on dreſſera le calcul ſuivant:

	on doit payer	ce qui fait à présent
après 1 an - -	$\frac{(m+1)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+1)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda}$,
après 2 ans - -	$\frac{(m+2)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+2)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^2}$,
après 3 ans - -	$\frac{(m+3)}{(m)} Mx$ - -	$\frac{(m+3)}{(m)} \cdot \frac{Mx}{\lambda^3}$,
	&c.	

Or l'équité exige que toutes ces sommes réduites au tems présent soient égales au fond entier Ma, d'où l'on tire cette équation:

$$a = \frac{x}{(m)}\left[\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.\right],$$

& partant ce que le fond doit payer par an à chacun des intéressans est

$$x = \frac{(m)\,a}{\frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \frac{(m+4)}{\lambda^4} + \&c.}.$$

Sachant donc les valeurs de toutes ces fractions (1), (2), (3), &c. il est aisé de trouver la somme x, qui convient à chaque âge de m ans rapportée à un intérêt donné.

VI. Question.

10. *Quand les intéressans sont des enfans nouvellement nés, & que le payement des rentes viageres ne doit commencer, que lorsqu'ils auront atteint un certain age, déterminer la quantité de ces rentes.*

Supposons qu'on paye la somme a pour chaque enfant nouvellement né, & qu'il ne doive recevoir des rentes, que lorsqu'il aura atteint l'age de n ans, que depuis ce tems on lui paye tous les ans la somme

ſomme x, qu'il faut déterminer. Comptant donc les intérêts comme auparavant, on parviendra à cette équation:

$$a = x\left(\frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \&c.\right),$$

qui fournit

$$x = \frac{a}{\frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \frac{(n+3)}{\lambda^{n+3}} + \&c.}.$$

D'où il eſt évident qu'une telle rente peut devenir fort avantageuſe, & qu'un homme, lorsqu'il aura atteint un certain âge, peut jouir de rentes conſidérables à peu de fraix pendant toute ſa vie.

11. Toutes ces queſtions ſe réſoudront donc facilement dès qu'on connoitra les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. qui dépendent tant du climat que de la maniere de vivre: auſſi a-t-on remarqué que ces valeurs ſont différentes pour les deux ſexes, de ſorte qu'on ne ſauroit rien déterminer en général. Or, pour les conclure des obſervations, on comprend aiſément, qu'il en faut employer un grand nombre, qui s'étend même ſur toutes ſortes de perſonnes: & à cet égard on ne ſauroit ſe ſervir des régiſtres des rentes viageres, qui commencent par des enfans au deſſous d'un an. Car d'abord, on ne peut pas regarder ces enfans comme nouvellement nés, & la plupart eſt ſans doute déjà échappée aux dangers des premiers mois: & enſuite, on ne s'engagera gueres ſouvent pour des enfans d'une complexion foible, de ſorte qu'on doit regarder comme choiſis les enfans pour lesquels on prend des rentes viageres. Ainſi les valeurs de nos fractions (1), (2), (3), &c. qu'on conclura des régiſtres des rentes viageres ſeront infalliblement trop grandes, ſurtout à l'égard des premiers ans. Cependant, puisqu'il faut regler les rentes ſur de tels régiſtres plutôt que ſur la véritable mortalité, j'ajoûterai les valeurs de nos fractions telles qu'on les tire des obſervations de M. Keerſeboom.

(1) = 0,804	(31) = 0,499	(61) = 0,264	(91) = 0,006
(2) = 0,768	(32) = 0,490	(62) = 0,254	(92) = 0,004
(3) = 0,756	(33) = 0,482	(63) = 0,245	(93) = 0,003
(4) = 0,709	(34) = 0,475	(64) = 0,235	(94) = 0,002
(5) = 0,688	(35) = 0,468	(65) = 0,225	(95) = 0,001
(6) = 0,676	(36) = 0,461	(66) = 0,215	
(7) = 0,664	(37) = 0,454	(67) = 0,205	
(8) = 0,653	(38) = 0,446	(68) = 0,195	
(9) = 0,646	(39) = 0,439	(69) = 0,185	
(10) = 0,639	(40) = 0,432	(70) = 0,175	
(11) = 0,633	(41) = 0,426	(71) = 0,165	
(12) = 0,627	(42) = 0,420	(72) = 0,155	
(13) = 0,621	(43) = 0,413	(73) = 0,145	
(14) = 0,616	(44) = 0,406	(74) = 0,135	
(15) = 0,611	(45) = 0,400	(75) = 0,125	
(16) = 0,606	(46) = 0,393	(76) = 0,114	
(17) = 0,601	(47) = 0,386	(77) = 0,104	
(18) = 0,596	(48) = 0,378	(78) = 0,093	
(19) = 0,592	(49) = 0,370	(79) = 0,082	
(20) = 0,584	(50) = 0,362	(80) = 0,072	
(21) = 0,577	(51) = 0,354	(81) = 0,063	
(22) = 0,571	(52) = 0,345	(82) = 0,054	
(23) = 0,565	(53) = 0,336	(83) = 0,046	
(24) = 0,559	(54) = 0,327	(84) = 0,039	
(25) = 0,552	(55) = 0,319	(85) = 0,032	
(26) = 0,544	(56) = 0,310	(86) = 0,026	
(27) = 0,535	(57) = 0,301	(87) = 0,020	
(28) = 0,525	(58) = 0,291	(88) = 0,015	
(29) = 0,516	(59) = 0,282	(89) = 0,011	
(30) = 0,507	(60) = 0,273	(90) = 0,008	

Or, puisque cette table est dressée sur des enfans choisis, & qui ont même déjà vécu quelques mois depuis leur naissance; si l'on veut l'applil'appliquer à tous les enfans nouvellement nés dans une ville ou province, il faut diminuer tous ces nombres d'une certaine partie pour tenir compte de la grande mortalité, à laquelle les enfans sont assujettis aussitôt après leur naissance. Mais nous tirerons cette correction plus seurement des observations qui renferment déjà la multiplication, que je m'en vai considérer.

II HYPOTHESE.

DE LA MULTIPLICATION.

12. C'est le principe de la propagation, sur lequel cette hypothese est fondée; d'où il est d'abord évident, que s'il nait tous les ans autant d'enfans, qu'il meurt d'hommes, le nombre de tous les hommes demeurera toujours le même, & qu'il n'y aura point alors de multiplication. Mais, si le nombre des enfans qui naissent tous les ans, surpasse le nombre des morts, chaque année produira une augmentation dans le nombre des vivans, qui sera égale à l'excès des naissans sur les morts. Or cette augmentation se changera en diminution, lorsque le nombre des morts surpasse celui des naissans. De là nous aurons trois cas à considérer: le premier, où le nombre des hommes demeure constamment le même; le second, où il augmente tous les ans; & le troisieme, où il diminue tous les ans. Donc, si M marque le nombre de tous les hommes qui vivent à présent, & mM le nombre de ceux qui vivent l'année suivante; le premier cas aura lieu, si $m = 1$, le second si $m > 1$, & le troisieme si $m < 1$; de sorte que tous les cas peuvent être compris dans le coëfficient général m.

13. Or, ayant fixé le principe de la propagation qui dépend des mariages & de la fécondité, il est évident que le nombre des enfans qui naissent pendant le cours d'une année, doit tenir un certain rapport au nombre de tous les hommes vivans. D'où il s'ensuit, que si le nombre des vivans demeure toujours le même, il naitra tous les ans le même nombre d'enfans: & si le nombre des vivans croît ou décroît, le nombre des naissances doit croitre ou décroître dans la même raison. Donc, en comparant ensemble le nombre de tous les naissans

pendant plusieurs années consécutives, selon que ce nombre demeure le même, ou qu'il augmente ou diminue, on en pourra conclure si le nombre de tous les hommes demeure le même, ou s'il va en croissant ou en décroissant. En y joignant le principe de mortalité il est aussi clair, que le nombre des mourans pendant un an doit tenir un certain rapport tant à celui de tous les vivans qu'à celui des naissans.

14. Puisque ces deux principes de la mortalité & de la propagation sont indépendans l'un de l'autre, & que j'ai considéré le premier indépendamment de l'autre, on peut aussi représenter celui-ci, sans que le premier y soit mêlé. Car, supposant le nombre de tous les vivans à la fois $= M$, le nombre des enfans qui en sont produits dans l'espace d'un an pourra être posé $= \alpha M$, de sorte que α est la mesure de la propagation ou de la fécondité. Mais il est difficile de tirer de cette position les conséquences qui regardent la multiplication & les autres phénomenes qui en dépendent. Le raisonnement deviendra plus clair, si nous introduisons d'abord dans le calcul le nombre des enfans, qui naissent tous les ans, auquel si nous joignons l'hypothese de la mortalité, nous en pourrons conclure la valeur de α. Donc réciproquement le nombre des naissances dépend à la fois des deux hypotheses de la mortalité & de la fécondité; & de là on tirera ensuite sans difficulté la solution de toutes les autres questions qu'on propose ordinairement en traitant cette matiere.

15. Comme je suppose que la regle de la mortalité demeure toujours la même, je supposerai une semblable constance dans la fécondité; de sorte que le nombre des enfans qui naissent tous les ans, soit toujours proportionel au nombre de tous les vivans. Donc, si le nombre de tous les vivans demeure le même, on aura aussi tous les ans le même nombre de naissances: & si le nombre de tous les vivans va en augmentant ou en diminuant, le nombre des naissances annuelles croîtra ou décroîtra dans la même raison. Soit donc N le nombre des enfans nés pendant le cours d'une année, & nN celui des enfans nés l'année suivante: & puisque la raison qui a changé le nombre

bre N ou nN subsiste encore, il faut que d'une année quelconque à la suivante le nombre des naissances croisse dans la raison de 1 à n. Par conséquent la troisieme année il naitra n^2N, la quatrieme n^3N, la cinquieme n^4N, & ainsi de suite, ou bien les nombres des naissances annuelles constitueront une progression géometrique, ou croissante ou décroissante, ou d'égalité, selon que $n > 1$, ou $n < 1$, ou $n = 1$.

16. Posons donc que, dans une ville ou province, le nombre des enfans nés dans cette année soit $=$ N, & de ceux qui naitront l'année prochaine $= n$N, & ainsi de suite selon cette progression

	le nombre des naissances
à présent - - - -	N,
après un an - - - -	nN,
après deux ans - - - -	n^2N,
après 3 ans - - - -	n^3N,
après 4 ans - - - -	n^4N,

&c.

& si nous supposons qu'après 100 ans aucun des hommes qui existent à présent, ne soit plus en vie, il n'y aura point après 100 ans d'autres vivans, que ceux qui resteront encore en vie de ces naissances. Donc, joignant l'hypothese de la mortalité, on pourra déterminer le nombre de tous les hommes qui vivront après 100 ans. Or, puisqu'il naitra cette année n^{100}N, on aura le rapport des naissances au nombre de tous les vivans.

17. Pour rendre cela plus clair, voyons combien d'hommes seront encore en vie après cent ans des naissances de toutes les années précédentes.

	Nombre des naiſſances	Après 100 ans il en vivra encore
à préſent - - - - - - - -	N	$(100)\ N$
après 1 an - - - - -	nN	$(99)\ nN$
après 2 ans - - - - -	$n^2 N$	$(98)\ n^2 N$
après 3 ans - - - - -	$n^3 N$	$(97)\ n^3 N$
⋮		
après 98 ans - - - - -	$n^{98} N$	$(2)\ n^{98} N$
après 99 ans - - - - -	$n^{99} N$	$(1)\ n^{99} N$
après 100 ans - - - - -	$n^{100} N$	$n^{100} N$

Donc le nombre de tous les vivans après 100 ans ſera $=$

$$n^{100} N \left(1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.\right)$$

18. Les termes de cette ſérie évanouiront enfin en vertu de l'hypotheſe de mortalité, & puisque le nombre de tous les vivans a un certain rapport au nombre des naiſſances pendant le cours d'une année, la multiplication d'une année à l'autre, qui vient d'être ſuppoſée comme 1 à n, nous découvre ce rapport. Car, ſi le nombre de tous les vivans eſt $= M$, & le nombre des enfans qui en ſont procréés pendant le cours d'une année eſt poſé $= N$, nous aurons

$$M = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

Donc, ſi nous connoiſſons le rapport $\frac{M}{N}$, & que nous y joignons, l'hypotheſe de mortalité, ou les valeurs des fractions (1), (2), (3), (4), &c. cette équation détermine réciproquement la raiſon de la multiplication $1 = n$ d'une année à l'autre. Cependant on voit bien, que cette déter-

détermination ne ſauroit être développée en général: mais, pour chaque hypotheſe de mortalité, ſi l'on calcule le rapport $\frac{M}{N}$ pour plusieurs valeurs de n, & qu'on en dreſſe une table, il ſera aiſé d'aſſigner réciproquement pour chaque rapport donné $M : N$, qui exprime la fécondité, l'augmentation annuelle de tous les vivans, qui eſt la même que celle des naiſſances.

19. Suppoſons donc que l'hypotheſe de mortalité, ou les fractions (1), (2), (3), (4), (5), &c. ſoient connues, de même que l'hypotheſe de fécondité, ou le rapport de tous les vivans M au nombre de enfans N qui en ſont procréés pendant un an, on en reconnoîtra ſi le nombre des hommes demeure invariable, ou s'il va en augmentant ou en diminuant. Car, ſi nous poſons le nombre de tous les vivans l'année prochaine $= nM$, celui des vivans à préſent étant $= M$, il faut tirer la valeur de n de l'équation trouvée

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

& ſuppoſant connue la réſolution de cette équation, il eſt indifférent ſi l'on connoit la fécondité $\frac{M}{N}$, ou la multiplication $1 : n$, l'une étant déterminée par l'autre, moyennant l'hypotheſe de la mortalité.

I QUESTION.

20. *Les hypotheſes de mortalité & fécondité étant données, ſi l'on connoit le nombre de tous les vivans, trouver combien il y en aura de chaque âge.*

Soit M le nombre de tous les vivans, & N le nombre des enfans qui en ſont procréés dans un an, & par l'hypotheſe de mortalité on connoîtra la raiſon de la multiplication annuelle $1 : n$. Or, connoiſſant la valeur de n, il eſt aiſé de conclure du §. 17. qu'il y aura parmi le nombre M, N enfans nouvellement nés,

$\frac{(1)}{n}$ N - - - - - âgés d'un an,

$\frac{(2)}{n^2}$ N - - - - - âgés de deux ans,

$\frac{(3)}{n^3}$ N - - - - - âgés de 3 ans,

$\frac{(4)}{n^4}$ N - - - - - âgés de 4 ans,

& en général

$\frac{(a)}{n^a}$ N - - - - - âgés de a ans.

Or la ſomme de tous ces nombres pris enſemble eſt $=$ M.

II QUESTION.

21. *Les mêmes choſes étant données, trouver le nombre des hommes qui mourront dans un an.*

Soit M le nombre des hommes qui vivent à préſent, y compris les enfans qui ſont nés cette année, dont le nombre ſoit $=$ N: & le quotient $\frac{M}{N}$ déterminera l'augmentation annuelle, qui ſoit $1 : n$. Donc, l'année prochaine le nombre des vivans ſera $= n$M, parmi lequel ſe trouve le nombre des nouvellement nés $= n$N, les autres, dont le nombre eſt $n\mathrm{M} - n\mathrm{N}$ ſont ceux qui ſont encore en vie de l'année précédente, dont le nombre étoit $=$ M; d'où il s'enſuit, qu'il en eſt mort $(1 - n)\mathrm{M} + n\mathrm{N}$. Donc, ſi le nombre des vivans eſt $=$ M, il en meurt pendant le cours d'une année $(1 - n)\mathrm{M} + n\mathrm{N}$; tandis que dans ce même tems il nait N enfans.

III Question.

22. *Connoissant tant le nombre des naissances que des enterremens qui arrivent pendant le cours d'une année, trouver le nombre de tous les vivans, & leur augmentation annuelle, pour une hypothese de mortalité donnée.*

Soit N le nombre des naissances, & O le nombre des enterremens, qui arrivent dans une année; ensuite, posons le nombre de tous les vivans $= M$, & l'augmentation annuelle $= 1 : n$; & la solution précédente nous fournit cette équation

$$O = (1 - n) M + n N,$$

Or l'hypothese de mortalité donne:

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

Donc, ayant par la premiere $M = \frac{O - nN}{1 - n}$, cette valeur étant substituée dans l'autre équation, donne

$$\frac{O - N}{1 - n} = \frac{N - O}{n - 1} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \&c.$$

d'où il faut trouver la valeur du nombre n.

23. Si le nombre des enterremens O est égal à celui des naissances N, de sorte que $N = (1 - n) M + n N$, il faut absolument qu'il soit $n = 1$, ou que le nombre des vivans demeure toujours le même; & dans ce cas ce nombre sera

$$M = N (1 + (1) + (2) + (3) + (4) + \&c.)$$

Or, si le nombre des naissances N surpasse celui des enterremens O, de sorte que $N - O$ soit un nombre positif, l'équation

$$\frac{N - O}{n - 1} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

don-

donnera pour n une valeur > 1, qui marque que le nombre des vivans va en croiſſant. Mais, ſi le nombre des naiſſances N eſt plus petit que celui des enterremens O, notre équation doit être repréſentée ſous cette forme:

$$\frac{O - N}{1 - n} = \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \&c.$$

d'où l'on tire pour n une valeur plus petite que 1, qui marque que le nombre des vivans va en décroiſſant.

IV QUESTION.

24. *Le nombre des naiſſances & des enterremens d'une année étant donné, trouver combien de chaque âge il y aura parmi les morts.*

Soit N le nombre des enfans nés pendant un an, & O le nombre des morts, & par la queſtion précédente on aura le nombre de tous les vivans M, avec la multiplication $1 : n$, d'une année à l'autre. De là conſidérons combien d'hommes il y aura en vie de chaque âge, tant cette année que l'année prochaine.

Nombre	Cette année	l'année ſuivante
des nouvellement nés - - - - - -	N	nN
de l'âge d'un an - - - - - -	$\frac{(1)}{n} N$	$(1)\ N$
de l'âge de deux ans - - - - -	$\frac{(2)}{n^2} N$	$\frac{(2)}{n} N$
de l'âge de trois ans - - - -	$\frac{(3)}{n^3} N$	$\frac{(3)}{n^2} N$
&c.		&c.

D'où

D'où il eſt évident qu'il en eſt mort pendant le cours de cette année

	le nombre des morts
au deſſous d'un an - - - - - -	$(1 - (1))\,N$,
de 1 an à deux ans - - - -	$((1) - (2))\,\frac{N}{n}$,
de 2 ans à 3 ans - - - - -	$((2) - (3))\,\frac{N}{n^2}$,
de 3 ans à 4 ans - - - - -	$((3) - (4))\,\frac{N}{n^3}$,
de 4 ans à 5 ans - - - - -	$((4) - (5))\,\frac{N}{n^4}$,

&c.

25. Le nombre de tous les morts de cette année étant $= O$, on aura cette équation

$$\frac{O}{N} = 1 - (1)\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{(3)}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \&c.$$

qui convient avec celle-ci $O = (1 - n)M + nN$, à cauſe de

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \frac{(4)}{n^4} + \frac{(5)}{n^5} + \&c.$$

Donc, connoiſſant l'hypotheſe de la mortalité avec la multiplication annuelle $1 : n$, & le nombre des naiſſances d'une année N, on peut déterminer combien d'hommes de chaque âge mourront probablement pendant le cours d'une année.

V QUESTION.

26. *Connoiſſant le nombre de tous les vivans, de même que le nombre des naiſſances, avec les nombres des morts de chaque âge pendant le cours d'une année, trouver la loi de la mortalité.*

 Soit

Soit M le nombre de tous les vivans, N celui des naissances, & O des enterremens pendant le cours d'une année; & de là on connoîtra d'abord la multiplication annuelle $n = \frac{M - O}{M - N}$: soit ensuite pour cette année

	le nombre des morts		par la précéd. question
au dessous d'un an - - - -	α	$=$	$(1 - (1))\, N$,
de 1 an à 2 ans - - - -	β	$=$	$((1) - (2))\, \frac{N}{n}$,
de 2 ans à 3 ans - - - -	γ	$=$	$((2) - (3))\, \frac{N}{n^2}$,
de 3 ans à 4 ans - - - - -	δ	$=$	$((3) - (4))\, \frac{N}{n^3}$,

&c.

& de là on trouvera les fractions (1), (2), (3), &c. qui contiennent la loi de la mortalité,

$$(1) = 1 - \frac{\alpha}{N},$$

$$(2) = (1) - \frac{n\beta}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta}{N},$$

$$(3) = (2) - \frac{n^2\gamma}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta - n^2\gamma}{N},$$

$$(4) = (3) - \frac{n^3\delta}{N} = 1 - \frac{\alpha - n\beta - n^2\gamma - n^3\delta}{N},$$

&c.

27. Voilà

27. Voilà une maniere plus ſeure que celles des rentes viageres pour déterminer la loi de la mortalité: & cette détermination deviendra la plus aiſée, ſi l'on choiſit une ville ou province, où le nombre des enterremens égale celui des bâtemes, de ſorte que $n = 1$; car alors il ſuffit de ſavoir le nombre des morts de chaque âge. Mais il faut bien remarquer qu'une telle loi de mortalité ne doit être étendue que ſur la ville ou province, dont on l'a tirée. En d'autres pays pourroit avoir lieu une loi tout à fait différente; & on a obſervé en particulier, que dans les grandes villes, la mortalité eſt plus grande que dans les petites, & dans celles-ci plus grande qu'aux villages. Si l'on ſe donnoit la peine de bien établir, tant la loi de mortalité, que celle de la fécondité pour pluſieurs endroits, on en pourroit tirer quantité de concluſions fort importantes.

28. Mais il faut encore remarquer, que, dans ce calcul que je viens de déveloper, j'ai ſuppoſé, que le nombre de tous les vivans d'un endroit demeure le même, ou qu'il croît ou décroît uniformement, de ſorte qu'il en faut exclure tant des ravages extraordinaires, comme la peſte, guerre, famine, que des accroiſſemens extraordinaires comme de nouvelles colonies. Il ſera auſſi bon de choiſir un tel endroit, où tous les naiſſans demeurent dans le pays, & où des étrangers ne viennent pas pour y vivre & mourir, ce qui renverſeroit les principes ſur lesquels j'ai fondé les calculs précédens. Pour des endroits aſſujettis à de telles irrégularités, il y faudroit tenir des régiſtrés exactes tant de tous les vivans que des morts, & alors, en ſuivant les principes que je viens d'établir, on ſeroit en état d'y appliquer le même calcul. Tout revient toujours à ces deux principes, celui de la mortalité & celui de la fécondité, qui, étant une fois bien établis pour un certain endroit, il ne ſera pas difficile de réſoudre toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur cette matiere, dont je me contente d'avoir rapporté les principales.

29. Je n'ai auſſi traité ces queſtions qu'en général ſans les borner à quelque endroit particulier: or, pour en tirer tous les avantages, tout dépend d'un grand nombre d'obſervations faites en pluſieurs endroits différens, tant du nombre de tous les vivans & des naiſſans pendant un ou pluſieurs ans, que du nombre des morts avec leurs âges. Comme c'eſt un article fort difficile à bien exécuter, nous devons être très redevables à Mr. Suſſmilch, Conſeiller du Conſiſtoire ſupérieur, qui, après avoir ſurmonté des obſtacles presque invincibles, nous a fourni un ſi grand nombre de telles obſervations, qui paroiſſent ſuffiſantes pour décider la plupart des queſtions qui ſe préſentent dans cette recherche. Et en effet, il en a déjà tiré lui même tant de concluſions importantes, que nous pouvons eſpérer qu'il portera par ſes ſoins cette ſcience au plus haut degré de perfection dont elle eſt ſuſceptible.