



DECOUVERTE
D'UN NOUVEAU PRINCIPE DE MECANIQUE,
PAR M. EULER.

Un corps est appellé solide, dont l'intérieur n'est assujetti à aucun changement, ou dont toutes les parties conservent constamment la même situation entr'elles, quelque mouvement que puisse avoir le corps entier. Nonobstant cette ferme & invariable liaison des parties, un corps solide peut recevoir une infinité de mouvemens differens, dont la determination & les loix, qui s'y observent, sont l'objet de la Mecanique, ou Dynamique: & c'est par là, que cette science se distingue de l'Hydrodynamique, ou Hydraulique, qui s'occupe dans la recherche du mouvement des corps fluides, dont toutes les parties sont tellement dégagées les unes des autres, que chacune peut avoir un mouvement à part. Entre ces deux especes de corps on peut constituer une moyenne, qui renferme les corps flexibles, dont la figure est susceptible d'une infinité de changemens: mais la considération du mouvement de ces corps se reduit aisément à la Mecanique, & peut être développée par les mêmes principes, de sorte que dans cette Science il ne s'agit que des loix du mouvement, qui regardent les corps solides.



II. Entre l'infinité des mouvemens , dont un corps solide est susceptible , le premier , qu'il faut considérer , est celui , où toutes les parties demeurent constamment dirigées vers les mêmes points de l'espace absolu. C'est à dire , si nous concevons une ligne droite tirée par deux points quelconques du corps , cette ligne conservera toujours la même direction , ou ce qui revient au même , elle demeurera perpétuellement parallèle à elle-même. Un tel mouvement est nommé purement progressif , dont la propriété consiste en ce qu'à chaque instant toutes les parties du corps se meuvent avec des vitesses égales selon la même direction. Ainsi lorsqu'un corps se meut d'un mouvement purement progressif , il suffit de savoir le mouvement d'un seul de ses élémens , c'est à dire , le chemin qu'il parcourt avec la vitesse à chaque endroit , pour connoître le mouvement du corps tout entier.

III. Or un corps , quoique solide , peut recevoir une infinité d'autres mouvemens ; car il peut arriver qu'un point du corps demeurant immobile , tout le corps tourne autour de ce point ; & il est clair que dans ce cas la vitesse des différentes parties de ce corps ne sera plus la même , & que la direction du mouvement sera différente dans les différentes parties du corps. Neantmoins dès qu'on fait le mouvement d'un seul point de ce corps , pendant qu'un autre point demeure en repos , on sera en état de déterminer le mouvement de tous les autres points du corps pour le même instant ; car , puisque le corps est solide , il faut , que tous ses points conservent toujours la même situation par rapport à ces deux , dont l'un est en repos , & le mouvement de l'autre connu. Ce mouvement de rotation se peut aussi joindre au mouvement purement progressif , d'où résulte un mouvement mixte , tel que nous observons dans la Terre , dont toutes les parties se meuvent en sorte que le mouvement de chacune est différent du mouvement de toutes les autres , tant par rapport à la vitesse , qu'à l'égard de la direction.

IV. Mais



IV. Mais comme le mouvement de rotation peut varier à l'infini, on n'a considéré jusqu'ici dans la Mécanique qu'une seule espèce; faute de principes suffisans pour ramener les autres au calcul. Cette espèce renferme les cas, où un corps tourne autour d'un axe, ou immobile, ou qui demeure constamment parallèle à soi-même, pendant que le corps se meut d'un mouvement progressif. Car dans ce dernier cas on peut décomposer le mouvement du corps en deux, dont l'un est purement progressif, & l'autre se fait autour d'un axe fixe, conservant toujours la même direction. C'est ainsi qu'on se représente le mouvement de la Terre, en le décomposant dans le mouvement annuel, qu'on regarde comme purement progressif, & dans le mouvement diurne, qui se fait autour de l'axe de la Terre, entant qu'on regarde cet axe comme constamment dirigé vers les mêmes points du Ciel; faisant abstraction tant de la précession des équinoxes, que de la nutation de l'axe de la Terre.

V. Quelque composé que soit le mouvement d'un corps solide, on le peut toujours décomposer en un mouvement progressif & en un mouvement de rotation. Le premier s'estime par le mouvement du centre de gravité du corps, & il est toujours permis de considérer ce mouvement séparément & indépendamment de l'autre mouvement de rotation; & cette circonstance nous fournit l'avantage, que nous pouvons toujours réciproquement considérer le mouvement de rotation indépendamment du mouvement progressif, s'il y en a; ou on peut entreprendre la recherche du mouvement de rotation, tout comme si le corps n'avoit aucun mouvement progressif. Pour cet effet on n'a qu'à imprimer dans la pensée à l'espace, où le corps se trouve, un mouvement progressif égal & contraire au mouvement du centre de gravité du corps, & par ce moyen on obtiendra le cas, où le centre de gravité du corps demeure en repos, quelque mouvement de rotation que puisse avoir le corps.

VI. Donc, quelque mouvement qui ait été imprimé d'abord à un corps solide, & de quelques forces qu'il soit sollicité ensuite, pour déterminer son mouvement à chaque instant, on commencera par



considérer le corps , comme si toute sa masse étoit réunie dans son centre de gravité , & alors on déterminera par les principes connus de la Mécanique le mouvement de ce point produit par les forces sollicitantes ; ce sera le mouvement progressif du corps. Après cela on mettra ce mouvement progressif à part , & on considèrera ce même corps , comme si son centre de gravité étoit immobile , pour déterminer le mouvement de rotation , ayant égard tant au mouvement imprimé au commencement , qu'aux forces dont il doit être altéré dans la suite. Et quand on sera venu à bout de cette recherche , en combinant ensemble ces deux mouvemens trouvés separement , on fera en état d'assigner pour chaque instant le vrai mouvement dont le corps sera porté.

VII. Supposant donc le centre de gravité d'un corps solide quelconque en repos , ce corps sera néanmoins susceptible d'une infinité de mouvemens différens. Or je démontrerai dans la suite , que , quel que soit le mouvement d'un tel corps , ce sera pour chaque instant non seulement le centre de gravité qui demeure en repos , mais il y aura aussi toujours une infinité de points situés dans une ligne droite , qui passe par le centre de gravité , dont tous se trouveront également sans mouvement. C'est à dire , quel que soit le mouvement du corps , il y aura en chaque instant un mouvement de rotation , qui se fait autour d'un axe , qui passe par le centre de gravité : & toute la diversité qui pourra avoir lieu dans ce mouvement , dépendra , outre la diversité de vitesse , de la variabilité de cet axe , autour duquel le corps tourne à chaque instant ; ou bien la question revient à ce qu'on cherche , si le corps tournera constamment autour du même axe , qui seroit par conséquent immobile , ou si l'axe de rotation changera lui même de situation , de sorte que le corps tourne successivement autour de diverses lignes , qui passent par son centre de gravité.

VIII. Pour faire voir maintenant combien on est avancé jusqu'ici dans la détermination de ces mouvemens de rotation , dont un corps solide est susceptible , je remarque que les principes de Mécanique

que



que, qui ont été établis jusqu'à présent, ne sont suffisans, que pour le cas, où le mouvement de rotation se fait continuellement autour du même axe. Donc, puisqu'on peut nommer les extrémités de cet axe les poles du corps, c'est le cas où les poles du corps demeurent constamment aussi bien en repos, que le centre de gravité. Or dès que l'axe de rotation ne demeure plus le même, & que les poles, autour desquels le corps tourne, changent eux-mêmes, alors les principes de Mécanique connus jusqu'ici ne sont plus suffisans à déterminer ce mouvement. Il s'agit donc de trouver & d'établir de nouveaux principes, qui soient propres à ce dessein; & cette recherche fera le sujet de ce Mémoire, dont je suis enfin venu à bout après plusieurs essais inutiles, que j'ai fait depuis long-tems.

IX. Mais, avant que d'entrer dans cette recherche, il sera à propos de déterminer plus exactement les cas, où un corps solide peut tourner autour d'un axe immobile passant par son centre de gravité, afin qu'on puisse mieux juger, en quelles occasions les principes connus de Mécanique peuvent être employés avec succès: & de là on connoitra en même tems, que dans tous les autres cas ces principes ne seront plus suffisans, mais qu'il faut avoir recours à ces principes nouveaux, dont j'entreprends ici la recherche. Or, pour juger si un corps peut tourner autour d'un axe immobile, ou non? il faut avoir égard tant à la constitution du corps même, qu'aux forces dont il est sollicité. Car, quand même il n'y a point de forces, qui agissent sur le corps, dès qu'il commence à tourner autour de quelque axe, chaque particule sera poussée par la force centrifuge; & ce n'est que dans le cas, où toutes ces forces centrifuges se détruisent mutuellement, que le mouvement autour de cet axe immobile pourra subsister.

X. Soit donc un corps solide quelconque, qui tourne librement *Fig.* autour d'un axe immobile Aa , qui passe par son centre de gravité O . Je considérerai cet axe Aa comme perpendiculaire au plan de la planche, dans lequel soit le centre de gravité O ; & dans ce plan je conçois



deux autres axes BOb & COc , normales tant entr'eux qu'au premier axe AOa : & c'est par rapport à ces trois axes, que je déterminerai la position de chaque élément du corps pour un instant quelconque. Car il est clair, que ces deux autres axes BOb & COc , en tant qu'ils traversent le corps, tourneront aussi avec le corps autour du premier axe AOa , qui est l'axe de rotation, & qui demeure immobile par hypothèse. Donc le point C de l'axe OC se mouvra en vertu du mouvement rotatoire par un arc de cercle $C\gamma$, dont le centre est en O sur le plan BOC : & si nous posons la distance $OC = f$ & la vitesse du point C due à la hauteur v , de sorte que la vitesse même sera exprimée par Vv , la vitesse de tout autre point du corps sera partout à sa distance de l'axe AOa comme Vv à f : ou bien $\frac{Vv}{f}$ marquera partout ce qu'on nomme la vitesse angulaire, ou la vitesse de rotation.

XI. Cela posé, soit Z un élément quelconque du corps, dont la masse soit indiquée par dM , la masse du corps entier étant $= M$; qu'on tire de ce point Z sur le plan BOC la perpendiculaire ZY , qui sera parallèle à l'axe de rotation AOa , & du point Y à OC la perpendiculaire YX : qu'on nomme de plus $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, qui seront les trois coordonnées orthogonales, par lesquelles le lieu du point Z est déterminé. Soit la droite ZY perpendiculaire à l'axe de rotation AO , & elle sera parallèle & égale à la droite YO , & partant il sera aussi $OV = YZ = z$. Donc la distance du point Z à l'axe de rotation sera $ZV = OY = \sqrt{xx + yy}$, d'où la vitesse du point Z , dont il tournera autour de l'axe AO , sera à sa distance $\sqrt{xx + yy}$ comme Vv est à f . Par conséquent la vitesse du point Z sera $= \frac{Vv(\sqrt{xx + yy})}{f}$, & la hauteur due à cette vitesse $= \frac{v(\sqrt{xx + yy})}{ff}$.



XII. De là il s'enfuit que la force centrifuge de l'élément $Z = dM$, sera $= \frac{2v(xx+yy)}{ff} \cdot \frac{dM}{V(xx+yy)} = \frac{2vdM}{ff} V(xx+yy)$.

où dM marque le poids, que cet élément auroit aux environs de la terre. C'est donc de cette force que l'élément Z tachera de s'éloigner de l'axe AO selon la direction VZ , & partant l'effet de cette force sera le même, que si l'axe de rotation étoit sollicité au point V selon la direction VZ par une force $= \frac{2vdM}{ff} V(xx+yy)$. Donc, puisqu'il

résulte de chaque élément du corps une force semblable qui agit sur l'axe de rotation AO , pour qu'il demeure néanmoins immobile, il faut que toutes ces forces se détruisent mutuellement. Car à moins que cela n'arrive, il est clair que l'axe de rotation ne sauroit demeurer immobile, mais comme il est supposé libre, il cederait à la force résultante; & tomberoit dans le cas, qui ne sauroit plus être développé par les principes déjà établis de la Mécanique.

XIII. Décomposons chacune de ces forces VZ en deux autres dont les directions soient parallèles aux axes OC & OB , & puisque VZ est parallèle & égale à $OY = V(xx+yy)$, la force qui agira sur l'axe de rotation OA en V selon la direction parallèle à OC sera $= \frac{x}{V(xx+yy)} \cdot \frac{2vdM}{ff} V(xx+yy) = \frac{2vx dM}{ff}$ & la force

selon la direction parallèle à OB sera $= \frac{2vy dM}{ff}$. Ayant donc

réduit toutes les forces centrifuges à deux espèces, dont l'une agit sur l'axe de rotation en des directions parallèles à OC & l'autre en des directions parallèles à OB , pour que l'axe de rotation n'en soit point altéré, il faut que toutes les forces de chaque espèce se détruisent mutuellement. Premièrement donc, il faut que la somme de toutes les forces

de l'une & de l'autre espèce évanouisse, ce qui donne $\frac{\int 2vxdM}{ff} = 0$

ou



ou $\frac{2v}{ff} \int x dM = 0$ & $\frac{2v}{ff} \int y dM = 0$: ou bien il faut qu'il soit $\int x dM = 0$ & $\int y dM = 0$. Or cette condition se trouve remplie dès que nous supposons, que l'axe de rotation AOa passe par le centre de gravité du corps O .

XIV. Mais cette seule condition ne suffit pas pour maintenir l'axe de rotation AOa en repos, il faut outre cela que tous les momens de toutes les forces de chaque espèce, se détruisent mutuellement. Car la première condition ne délivre l'axe de rotation que du mouvement progressif, & cette seconde condition est requise pour empêcher, qu'il ne s'incline de quelque côté vers le plan BCO . Or le moment des

forces $\frac{2vx dM}{ff}$, qui agissent sur le point V de l'axe, étant réduit au

centre de gravité O sera $= \frac{2vxz dM}{ff}$, & le moment de chaque

force de l'autre espèce sera $= \frac{2vyz dM}{ff}$. Donc cette seconde con-

dition qui doit empêcher l'inclinaison de l'axe de rotation, exige qu'il

soit tant $\frac{\int 2vxz dM}{ff} = 0$ que $\frac{\int 2vyz dM}{ff} = 0$, ou puisque pour l'in-

stant présent $\frac{2v}{ff}$ est une quantité constante, il faut qu'il soit $\int xz dM = 0$,

& $\int yz dM = 0$.

XV. Donc, pour qu'un corps solide puisse tourner librement autour d'un axe AOa immobile, il faut premièrement que cet axe passe par le centre de gravité O du corps, & outre cela il est nécessaire, que la matière, dont le corps est composé, soit tellement disposée autour de cet axe, qu'il soit tant $\int xy dM = 0$ que $\int yz dM = 0$. On voit bien que cette dernière condition peut ne pas avoir lieu, quoique l'axe de rotation passe par le centre de gravité; & partant dans ce cas,

il



il fera impossible de déterminer par les principes connus de Mécanique la continuation du mouvement, après que le corps aura reçu un mouvement quelconque autour d'un tel axe. Car alors dès le commencement l'axe de rotation s'inclinera, & le corps tournera à chaque instant autour d'un autre axe, ce qui rendra impossible l'application des principes, dont on se sert ordinairement dans la détermination des mouvemens de rotation.

XVI. Mais si l'axe de rotation passe non seulement par le centre de gravité du corps, mais qu'il y ait aussi tant $\int x z dM = 0$ que $\int y z dM = 0$, alors quelque mouvement de rotation que le corps puisse avoir reçu autour de cet axe, ce mouvement se continuera uniformément, sans que l'axe souffre le moindre changement; ou le corps tournera autour de cet axe immobile d'un mouvement uniforme, à moins que le corps ne soit sollicité par quelque force externe. Or il peut arriver que des forces externes agissent sur le corps sans troubler la position de l'axe; c'est lorsque la moyenne direction de ces forces tombe dans le plan BOC, perpendiculaire à l'axe de rotation dans le centre de gravité même du corps O. Car alors ces forces n'auront point de moment ni par rapport à l'axe BO ni à CO, & parant toute la force sera employée ou à accélérer ou à retarder le mouvement de rotation autour de l'axe AO, sans altérer l'axe même. Et c'est ce cas, où l'on peut déterminer ces changemens causés par des forces externes à l'aide des principes connus de Mécanique.

XVII. Or si la moyenne direction des forces, qui agissent sur le corps, ne se trouve pas dans le plan BOC, l'axe de rotation AO ne pourra pas demeurer immobile, mais il s'inclinera vers le côté où il sera forcé par le moment de ces forces. Ainsi, quoique l'axe ait les propriétés, qui viennent d'être expliquées, les forces le rendront mobile, & sans la découverte de nouveaux principes de Mécanique on ne fera pas en état de développer ce cas, où l'axe de rotation ne sauroit demeurer immobile. Donc toutes les fois que les conditions marquées ne se rencontrent pas dans l'axe de rotation, ou que les



forces sollicitantes renferment un moment pour incliner l'axe de rotation, ou que l'un & l'autre arrive à la fois, il faut recourir à ces nouveaux principes pour déterminer les changemens, qui seront causés tant dans le mouvement de rotation, que dans la position de l'axe, autour duquel le corps tournera à chaque instant. Or pendant tous ces changemens on peut toujours supposer, que le centre de gravité du corps demeure immobile.

XVIII. Quoique les principes dont il s'agit ici soient nouveaux, entant qu'ils ne sont pas encore connus ou étalés par les Auteurs, qui ont traité la Mécanique, on comprend néanmoins, que le fondement de ces principes ne sauroit être nouveau, mais qu'il est absolument nécessaire, que ces principes soient déduits des premiers principes, ou plutôt des axiomes, sur lesquels toute la doctrine du mouvement est établie. Ces axiomes se rapportent à des corps infiniment petits, ou tels, qui ne soient susceptibles d'autre mouvement, que de progressif; & c'est de là que tous les autres principes du mouvement doivent être déduits, tant ceux qui servent à déterminer les mouvemens des corps solides que des fluides: tous ces autres principes dérivés n'étant que des applications des axiomes selon les diverses manières, dont les corps sont composés des élémens, & selon la diversité du mouvement, dont toutes les parties du corps sont susceptibles.

XIX. On trouve ordinairement plusieurs tels principes, qui semblent devoir être mis au rang des axiomes de la Mécanique, puisqu'ils se rapportent aux mouvement des corps infiniment petits; or je remarque que tous ces principes se réduisent à un seul, qu'on peut regarder comme l'unique fondement de toute la Mécanique & des autres Sciences, qui traitent du mouvement des corps quelconques. Et c'est sur ce seul principe, que doivent être établis tous les autres principes, tant ceux qui sont déjà reçus dans la Mécanique & l'Hydraulique, & dont on se sert actuellement pour déterminer le mouvement des corps solides & fluides; que ceux aussi qui ne sont pas encore connus, & dont nous avons besoin pour développer tant les cas marqués

qués cy-dessus des corps solides, que plusieurs autres qui se trouvent dans les corps fluides. Car dans tous ces cas il ne s'agit que d'y appliquer adroitement ce principe fondamental, dont je viens de parler, & que je m'en vai expliquer plus soigneusement.

EXPLICATION DU PRINCIPE GENERAL ET FONDAMENTAL DE TOUTE LA MECANIQUE.

XX. Soit un corps infiniment petit, ou dont toute la masse soit réunie dans un seul point, cette masse étant $\equiv M$; que ce corps ait reçu un mouvement quelconque, & qu'il soit sollicité par des forces quelconques. Pour déterminer le mouvement de ce corps, on n'a qu'à avoir égard à l'éloignement de ce corps d'un plan quelconque fixe & immobile; soit à l'instant présent la distance du corps à ce plan $\equiv x$; qu'on décompose toutes les forces qui agissent sur le corps, selon des directions, qui soient ou paralleles au plan, ou perpendiculaires, & soit P la force qui résulte de cette composition selon la direction perpendiculaire au plan, & qui tachera par conséquent ou à éloigner ou à rapprocher le corps du plan. Après l'élément du tems dt , soit $x + dx$ la distance du corps au plan, & prenant cet élément dt pour constant, il sera $2 M ddx \equiv \pm P dt^2$, selon que la force P tend ou à éloigner ou à rapprocher le corps du plan. Et c'est cette formule seule, qui renferme tous les principes de la Mécanique.

XXI. Pour mieux comprendre la force de cette formule, il faut expliquer à quelles unités se rapportent les diverses quantités M, P, x & t , qui s'y trouvent. Or d'abord il est à remarquer, que M marquant la masse du corps, exprime en même tems le poids que ce corps auroit aux environs de la superficie de la terre; de sorte que la force P étant aussi réduite à celle d'un poids, les lettres M & P contiennent des quantités homogenes. Ensuite la vitesse du corps dont il s'éloigne du plan étant comme $\frac{dx}{dt}$; si nous supposons, que



cette vitesse soit égale à celle qu'un corps grave acquiert en tombant de la hauteur v , il faut prendre $\frac{dx^2}{dt^2} = v$, ou l'élément du tems sera $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$; d'où l'on connoit le rapport entre le tems t & l'espace x .

XXII. Comme cette formule ne détermine que l'éloignement ou l'approchement du corps par rapport à un plan fixe quelconque, pour trouver le vrai lieu du corps à chaque instant, on n'aura qu'à le rapporter en même tems à trois plans fixes, qui soient perpendiculaires entr'eux. Donc, comme x marque la distance du corps à un de ces plans, soient y & z ses distances aux deux autres plans : & après avoir décomposé toutes les forces qui agissent sur le corps, suivant des directions perpendiculaires à ces trois plans, soit P la force perpendiculaire qui en résulte sur le premier, Q sur le second, & R sur le troisième. Supposons que toutes ces forces tendent à éloigner le corps de ces trois plans ; car en cas qu'elles tendent à le rapprocher, on n'auroit qu'à faire les forces negatives. Cela posé, le mouvement du corps sera contenu dans les trois formules suivantes :

$$\text{I. } 2Mddx = Pdt^2; \quad \text{II. } 2Mddy = Qdt^2; \quad \text{III. } 2Mddz = Rdt^2.$$

XXIII. Si le corps n'est sollicité par aucune force, de sorte que $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, les trois formules trouvées, à cause de dt constant, se réduiront par l'intégration à celles-cy :

$$Mdx = A dt; \quad Mdy = B dt; \quad \& \quad Mdz = C dt.$$

d'où l'on voit d'abord, que dans ce cas le corps se mouvra dans une ligne droite, avec un mouvement uniforme; & partant ces formules renferment en soi la première loi du mouvement, en vertu de laquelle tout corps étant en repos y demeure; or étant en mouvement le corps continuë uniformément selon la même direction, à moins qu'il ne soit sollicité par quelque force de dehors. Mais il est clair que

nos formules ne se bornent point à cette grande loi, elles renferment outre cela les loix, suivant lesquelles des forces quelconques agissent sur les corps. Par conséquent le principe que je viens d'établir contient tout seul tous les principes qui peuvent conduire à la connoissance du mouvement de tous les corps, de quelque nature qu'ils soient.

XXIV. C'est donc de ce même grand principe, d'où il faudra dériver les règles, dont nous avons besoin pour déterminer le mouvement d'un corps solide, lorsque l'axe de rotation ne demeure pas immobile. Pour cet effet il faudra considérer non seulement tous les élémens du corps, mais aussi leur liaison mutuelle, en vertu de laquelle tous les élémens conservent entr'eux le même ordre & les mêmes distances. Car le mouvement du corps entier est composé des mouvemens de tous ses élémens, & le mouvement de chacun doit suivre le principe, que je viens d'expliquer, entant que chaque élément participe des forces, qui agissent sur le corps, & qu'il est outre cela sollicité par de certaines forces, qui l'empêchent, qu'il n'abandonne la connexion avec les autres. Or avant que de déterminer cet effet des forces, auxquelles les élémens sont assujettis, il faut considérer en general le mouvement, dont un tel corps est susceptible.

DÉTERMINATION DU MOUVEMENT EN GENERAL,
DONT UN CORPS SOLIDE EST SUSCEPTIBLE, PENDANT QUE
SON CENTRE DE GRAVITÉ DEMEURE EN REPOS.

XXV. Soit donc O le centre de gravité du corps, supposé en *Fig. II.* repos, qu'on considère trois plans fixes, qui se croisent perpendiculairement dans ce point O . Ou ce qui revient au même, considérons trois axes AO , BO , CO qui se rencontrent en O à angles droits, dont deux BO , CO soient sur le plan de la table, & le troisième AO y soit perpendiculaire. Ces trois axes détermineront les trois



plans normales entr'eux, dont je viens de parler, & qui seront AOB, AOC, & BOC, dont celui-cy est le plan de la table. Or je supposerai que ces plans, & partant aussi ces trois axes, demeurent immobiles, pendant que le corps se meut d'un mouvement quelconque; son centre de gravité restant pourtant toujours en O sans mouvement. C'est pour avoir des lieux fixes, par rapport auxquels on puisse déterminer à chaque instant la situation du corps.

XXVI. Soit maintenant un élément quelconque du corps en Z, duquel on baïsse sur le plan BOC la perpendiculaire ZY, & du point Y à OC la normale YX: qu'on nomme $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$: & $OX = x$ marquera la distance du point Z au plan AOB; $XY = y$ sa distance au plan AOC, & $YZ = z$ sa distance au plan BOC. A présent, quel que soit le mouvement du point Z, on le pourra résoudre selon les directions de ces trois axes; supposons donc qu'après un tems infiniment petit $= dt$, sa distance au plan AOB devienne $= x + Pdt$; au plan AOC $= y + Qdt$, & au plan BOC $= z + Rdt$, ou que ce point Z s'éloigne dans le tems dt du plan AOB de l'élément $= Pdt$; du plan AOC de l'élément $= Qdt$, & du plan BOC de l'élément $= Rdt$: ou ce qui revient au même soient P, Q, R les vitesses, dont le point Z s'éloigne de chacun des plans fixes AOB, AOC, & BOC.

XXVII. Or puisque le corps est supposé solide, il faut que le point Z demeure toujours à la même distance depuis le centre de gravité O. Mais au commencement du tems dt la distance OZ étoit $= \sqrt{(xx + yy + zz)}$, & au bout de ce tems elle sera $= \sqrt{(x + Pdt)^2 + (y + Qdt)^2 + (z + Rdt)^2}$. Il faut donc que ces deux distances soient égales entr'elles, d'où, en effaçant les termes qui évanouissent par rapport aux autres, résultera cette équation:

$$2xPdt + 2yQdt + 2zRdt = 0.$$

qui se réduit à celle-cy:

$$Px + Qy + Rz = 0$$

Ces



Ces lettres P, Q, R, marquent des fonctions de nos trois variables x, y, z . & partant après avoir trouvé la nature de ces fonctions, on fera en état de déterminer le mouvement de chaque point du corps à l'instant proposé, c'est à dire, au commencement du tems dt .

XXVIII. Considérons de plus pour ce même instant un autre point du corps en z , qui soit infiniment proche du précédent Z . Soient pour ce point z les trois variables $Ox = x + dx$, $Oy = y + dy$, & $Oz = z + dz$: où il faut remarquer que ces différentielles dx, dy, dz sont indépendantes entr'elles, vù que l'autre point z est pris à volonté. La distance de ce point au premier Z sera donc $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; or différentiant les fonctions P, Q, R en donnant à dx, dy, dz les valeurs, que la position du point z par rapport à Z exige; après le tems dt , ce point z avancera dans la direction OC de l'élément $(P + dP)dt$, dans la direction OB de l'élément $(Q + dQ)dt$, dans la direction OA de l'élément $= (R + dR)dt$. Ou bien après le tems dt les distances seront

	du point z		or du point Z
au plan AOB	$= x + dx + (P + dP)dt \dots$	$= x + Pdt$	
au plan AOC	$= y + dy + (Q + dQ)dt \dots$	$= y + Qdt$	
au plan BOC	$= z + dz + (R + dR)dt \dots$	$= z + Rdt$	

XXIX. Ainsi au bout du tems dt la distance entre les points Z & z sera $= \sqrt{((dx + dPdt)^2 + (dy + dQdt)^2 + (dz + dRdt)^2)}$ qui à cause de la solidité du corps doit être la même qu'au commencement. Posant donc cette expression égale à $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ nous obtiendrons cette équation $2 dx dPdt + 2 dy dQdt + 2 dz dRdt = 0$, en négligeant les termes qui sont incomparablement moindres que ceux-cy. Cette équation se réduit donc à cette forme plus simple

$$dP dx + dQ dy + dR dz = 0$$

qui étant jointe à celle qui a été trouvée, savoir

$$Px + Qy + Rz = 0$$



nous servira à découvrir la nature des fonctions P, Q, R, d'où nous connoîtrons tous les mouvemens, dont toutes les parties d'un corps solide sont susceptibles à la fois, pendant que son centre de gravité demeure immobile en O. D'où il est d'abord clair que posant $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, toutes ces trois fonctions P, Q, R, doivent évanouir aussi.

XXX. Pour mieux connoître ces fonctions, supposons qu'il soit $Ox = OX$ & $XY = xy$, ou $dx = 0$ & $dy = 0$: & l'équation trouvée en dernier lieu donnera $dR dz = 0$ & partant $dR = 0$. d'où l'on voit que la fonction R ne sauroit renfermer la variable z. Car supposant pour prouver cela $dR = Ldx + Mdy + Ndz$, il sera dans le cas présent $dR = Ndz$ à cause de $dx = 0$ & $dy = 0$, & partant $N = 0$: donc il sera en général $dR = Ldx + Mdy$, & par conséquent la fonction R ne contiendra point la variable z. De même posant $dx = 0$ & $dz = 0$, il doit être $dQ dy = 0$ ou $dQ = 0$, d'où l'on voit que la fonction Q ne sauroit contenir la variable y. Et enfin si nous considérons le cas où $dy = 0$ & $dz = 0$, nous apprendrons pareillement qu'à cause de $dP dx = 0$, la fonction P ne sauroit contenir la variable x.

XXXI. Ayant reconnu ces propriétés de ces fonctions P, Q, R posons donc:

$$dP = A dy + B dz; \quad dQ = C dz + D dx; \quad dR = E dx + F dy.$$

& ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$dP dx + dQ dy + dR dz = 0$$

produiront l'équation suivante:

$$\begin{aligned} &+ A dx dy + B dx dz + C dy dz \\ &+ D dx dy + E dx dz + F dy dz = 0 \end{aligned}$$

d'où il est clair qu'il doit être $D = -A$; $E = -B$; $F = -C$

puisque cette équation doit avoir lieu, soit qu'on mette $dx = 0$ ou $dy = 0$ ou $dz = 0$. Ainsi les différentiels de nos fonctions seront:

$$dP = A dy + B dz; \quad dQ = C dz - A dx; \quad dR = -B dx - C dy.$$

Or



Or comme ces formules doivent être intégrables, il est évident de la première, que ni A ni B ne sauroit renfermer x ; de la seconde on comprend que ni C ni A ne sauroit contenir y , & enfin la troisième nous donne à connoître que ni B ni C ne peut contenir z . Ainsi A ne contenant ni x ni y , sera fonction de z , B fonction de y , & C fonction de x .

XXXII. Posons donc en conséquence de ce que nous venons de trouver :

$$dA = Ldz, \quad dB = Mdy \quad \& \quad dC = Ndx.$$

& puisque $A dy + B dz$ doit être un différentiel intégrable, il faut qu'il soit $\frac{dA}{dz} = \frac{dB}{dy}$: ou $L = M$. Ensuite l'intégrabilité de la

seconde formule $C dz - A dx$ donne $\frac{dC}{dx} = -\frac{dA}{dz}$ ou $N = -L$:

enfin l'intégrabilité de la troisième formule $-B dx - C dy$ donne $-\frac{dB}{dy} = -\frac{dC}{dx}$ ou $-M = -N$. Ayant donc $M = L$; $N = -L$

& $M = N$ ou $L = -L$, il est clair que $L = 0$ & partant aussi $M = 0$ & $N = 0$. Donc les lettres A, B, C marqueront des quantités constantes; d'où l'on tire par conséquent, en intégrant

$$P = Ay + Bz; \quad Q = Cz - Ax; \quad R = -Bx - Cy$$

expressions, qui satisfont déjà d'elles mêmes à la première condition :

$$Px + Qy + Rz = 0.$$

XXXIII. Tout mouvement donc, qu'un corps solide peut recevoir, son centre de gravité demeurant immobile, doit toujours avoir cette propriété: Que si d'un point quelconque du corps Z on tire les trois coordonnées orthogonales $OX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, selon les trois axes perpendiculaires entr'eux OA, OB, OC, & qu'on décompose le mouvement du point Z selon les mêmes trois directions, en nommant la vitesse du mouvement selon OC = P,



celle du mouvement selon $OB = Q$ & celle du mouvement selon $OA = R$; ces lettres P, Q, R ne sauroient jamais avoir d'autres valeurs, que telles, qui sont renfermées dans les formules suivantes.

$$P = Ay + Bz; \quad Q = Cz - Ax; \quad R = -Bx - Cy.$$

Donc toute la diversité, qui peut avoir lieu dans le mouvement du corps, ne provient que des diverses valeurs, que peuvent recevoir les quantités constantes A, B, C .

XXXIV. Puisque ces formules serviront à déterminer le mouvement de chaque point du corps pendant l'élément du tems dt , voyons s'il y a, outre le centre de gravité O , des points destitués de tout mouvement; ou pour lesquels devienne $P = 0, Q = 0$ & $R = 0$. Or posant $P = 0$ nous aurons $Ay + Bz = 0$, & partant $z = Au$ & $y = -Bu$, où u marque une nouvelle variable quelconque; donc prenant ces valeurs pour y & z quelque valeur qu'on ne donne à x , les points du corps qui répondent ne changeront point de distance par rapport au plan AOB . Soit de plus $Q = 0$, & il deviendra $Cz = Ax$, ou $x = Cu$; & la même valeur se trouve pour x , en posant $R = 0$. D'où il s'ensuit que tous les points du corps, qui sont contenus dans ces formules $x = Cu; y = -Bu; z = Au$ demeureront en repos pendant le tems dt . Or tous ces points se trouvent dans une ligne droite, qui passe par le centre de gravité O ; donc cette ligne droite demeurant immobile fera l'axe de rotation, autour duquel le corps tourne dans le présent instant.

XXXV. Pour trouver le mouvement de rotation du corps autour de cet axe, que nous venons de trouver, soit $YZ = z = 0$, & que le point Y soit tellement situé, que la droite OY devienne perpendiculaire à l'axe de rotation. Pour cet effet il sera $y : x = Cu : Bu$. Prenons donc $x = Bu$ & $y = Cu$, & la distance du point Y à l'axe de rotation sera $= u\sqrt{(BB + CC)}$. Or à cause de $x = Bu; y = Cu$ & $z = 0$, les trois vitesses du point Y selon les trois directions OC, OB, OA seront:

$$P = ACu; \quad Q = -ABu; \quad R = -BBu - CCu.$$

Donc



Donc la vraie vitesse du point Y étant $\equiv \sqrt{PP + QQ + RR}$ fera $\equiv u \sqrt{BB + CC} (AA + BB + CC)$; qui étant divisée par la distance OY $\equiv u \sqrt{BB + CC}$ donnera la vitesse angulaire ou rotatoire du corps autour de l'axe de rotation, laquelle fera par conséquent $\equiv \sqrt{AA + BB + CC}$.

XXXVI. Quelque mouvement donc, qui puisse être imprimé à un corps solide, son centre de gravité demeurant en repos, ce mouvement se fera à chaque instant autour d'un axe, qui sera immobile pendant cet instant, & qui passera par le centre de gravité du corps; & la vitesse rotatoire autour de cet axe fera $\equiv \sqrt{AA + BB + CC}$. De là il sera aisé de déterminer la vraie vitesse de tous les points du corps; on n'aura qu'à chercher la distance d'un point quelconque à l'axe de rotation, & cette distance étant posée $\equiv r$, la vitesse vraie de ce point fera $\equiv r \sqrt{AA + BB + CC}$, dont la direction sera connue par la nature du mouvement de rotation. Il est donc impossible que toutes les parties d'un corps, qui tourne sur soi-même, ou autour de son centre de gravité, soient en mouvement à la fois; puisque il y a toujours une ligne droite, dont tous les points seront en repos du moins pour un instant, & le mouvement des autres points du corps sera d'autant plus rapide, plus ils seront éloignés de l'axe de rotation.

XXXVII. Sans entrer dans le détail du calcul, que je viens de développer, on peut aussi prouver la même vérité par la seule Géométrie. Qu'on considère dans le corps une couche sphérique, dont le centre soit dans le centre de gravité du corps; car il est évident, qu'ayant connu le mouvement de cette superficie sphérique, le mouvement du corps tout entier sera déterminé. Soit AB un arc quelconque d'un grand cercle de cette surface sphérique, qui par le mouvement du corps parvienne en *ab* après le tems *dt*, de sorte que *ab* \equiv AB, & de là il sera aisé de déterminer les endroits où tous les autres points de la surface sphérique seront transportés. Qu'on prolonge ces deux arcs AB & *ab* jusqu'en C, où ils s'entrecoupent, &



prenant $ac = AC$, le point C sera transporté en c , & l'arc CAB en cab pendant le tems dt . De plus si nous considérons hors du cercle CAB un autre point quelconque M , & que nous tirions de là à C l'arc d'un grand cercle MC , pour trouver où ce point M sera transporté pendant le même tems dt , on n'a qu'à constituer en c un arc $cm = CM$, de sorte que l'angle acm soit égal à l'angle ACM , & il est clair, que m sera le lieu du point M après le tems dt .

XXXVIII. Il est aussi clair que ces deux arcs CM & cm étant prolongés se rencontreront quelque part en O , & partant dans le tems dt l'arc entier CMO sera transporté en cmO , & s'il étoit $CMO = cmO$, le point O demeureroit immobile. Or il est certain qu'on peut toujours constituer en sorte l'arc CMO , qu'ayant décrit son arc correspondant cmO , il soit $cmO = CMO$. Car pour que cela arrive on n'a qu'à constituer l'arc CMO en sorte, que l'angle cCO devienne égal à l'angle CcO ; afin que le triangle sphérique COc devienne isoscele, & partant les cotés CO & cO égaux entr'eux. Pour trouver cette position il faut remarquer que l'angle $cCO = ACO - ACc$ & $CcO = 180^\circ - acO$; & de là puisque l'angle $ACO = acO$ & $cCO = CcO$, on tirera $2cCO = 180^\circ - ACc$ & partant $cCO = 90^\circ - \frac{1}{2}ACc$. Donc, si nous partageons l'angle ACc en deux parties égales par l'arc $C\gamma$, l'angle γCO deviendra droit, & partant l'arc CMO doit être perpendiculaire à l'arc $C\gamma$.

XXXIX. Ayant ainsi déterminé la position de l'arc CMO , pour trouver le point O même, qui demeure immobile pendant le tems dt , le plus court moyen sera de tirer du point O sur le milieu ω de la base Cc l'arc perpendiculaire $O\omega$. Car alors connoissant dans le triangle sphérique $C\omega O$ rectangle à ω le côté $C\omega = \frac{1}{2}Cc$ & l'angle $\omega CO = 90^\circ - \frac{1}{2}ACc$, on en tirera $\text{tang } C\omega = \text{tang } CO \text{ cof } \omega CO$, ou $\text{tang } CO = \frac{\text{tang } C\omega}{\text{cof } \omega CO} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}Cc}{\text{fin } \frac{1}{2}ACc}$. Mais comme le tems dt est supposé infiniment petit, tant l'intervalle Cc que l'angle ACc feront



feront aussi infiniment petits, & partant égaux à leur sinus ou tangentes.

Donc la tangente de l'arc CMO sera $= \frac{Cc}{ACc}$, ou bien tang CO

$= \frac{Cc}{ACc}$. Par ce moyen on déterminera aisément la grandeur de

l'arc CMO, dont la position étant perpendiculaire à l'arc Cy, ou à l'arc BAC même, l'angle ACc étant infiniment petit, on connoitra le point O, par lequel passe l'axe de rotation, autour duquel tourne le corps pendant l'élément du tems dt .

RECHERCHE DES FORCES REQUISES

POUR CONSERVER LE CORPS DANS UN MOUVEMENT QUELCONQUE.

XL. Ayant rapporté le corps à trois axes fixes AO, BO, CO *Fig. IV* perpendiculaires entr'eux, qui se croisent dans le centre de gravité O du corps, qui demeure toujours immobile; soient $OX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$ les trois coordonnées orthogonales, qui déterminent le lieu d'un élément quelconque du corps situé en Z, pour l'instant présent, & soit dM la masse de cet élément. Que le mouvement de cet élément soit tel, qu'en le décomposant selon les directions de nos trois axes fixes, la vitesse selon OC soit $= \lambda y - \mu z$; la vitesse selon OB $= \nu z - \lambda x$; & la vitesse selon OA $= \mu x - \nu y$: posant pour les lettres A, B, C du §. 33. les lettres $\lambda, -\mu, \nu$. Donc l'axe de rotation dans l'instant présent se trouvera en prenant $x = \nu u$; $y = \mu u$ & $z = \lambda u$; & la vitesse rotatoire autour de cet axe sera $= V(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu)$. Or je suppose que ces vitesses étant affirmatives tendent à éloigner le point Z selon les directions des trois axes du point O.

XLI. Donc pendant l'élément du tems $= dt$, l'élément dM en Z s'éloignera du plan AOB par l'élément d'espace $= (\lambda y - \mu z) dt$, du plan AOC par l'élément $= (\nu z - \lambda x) dt$, & du plan BOC par l'élément $= (\mu x - \nu y) dt$. Prenant donc $x + dx, y + dy$ & $z + dz$



pour les coordonnées, qui déterminent le lieu de notre élément dM après le tems dt ; nous aurons pour les différentiels dx , dy & dz les valeurs suivantes,

$dx = (\lambda y - \mu z) dt$; $dy = (\nu z - \lambda x) dt$; $dz = (\mu x - \nu y) dt$
 qui ont cette propriété, comme nous avons vu, que tous les élémens du corps demeurent à la même distance, tant entr'eux, que du centre de gravité O . D'où il est clair qu'il est impossible que toutes ces trois expressions soient affirmatives à la fois, quoique nous les regardions comme telles; puisqu'il faut qu'il soit toujours $(x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2 = xx + yy + zz$, ou bien $x dx + y dy + z dz = 0$.

XLII. Maintenant pour la continuation du mouvement en supposant l'élément du tems dt constant, il faut par le principe général du mouvement, que l'élément dM en Z soit sollicité par trois forces selon les directions de nos trois axes. Car la masse de cet élément étant posée $= dM$, il faut qu'il soit sollicité dans la direction OC par une force $= \frac{2dM ddx}{dt^2}$, dans la direction OB par la force $= \frac{2dM ddy}{dt^2}$ & dans la direction OA par la force $= \frac{2dM ddz}{dt^2}$. Ces forces renferment en soi tant les forces externes, dont le corps peut être sollicité par dehors, que les forces internes, dont les parties du corps sont liées entr'elles, afinqu'elles ne changent pas leur situation relative. Or il est à remarquer que les forces internes se détruisent mutuellement, de sorte que la continuation du mouvement ne demande des forces externes, qu'entant que ces forces ne se détruisent pas mutuellement.

XLIII. Pour rendre notre recherche générale, supposons que l'axe de rotation change après le tems dt d'une manière quelconque, de même que la vitesse angulaire, ce qui arrivera, lorsque les lettres λ , μ , ν , ne marqueront plus des quantités constantes. Soient donc les quantités λ , μ , ν , variables, & pour trouver les différentio-

différen-



différentiels ddx , ddy & ddz , les valeurs de dx , dy , dz nous fourniront :

$$ddx = (\lambda dy + y d\mu - \mu dz - z d\lambda) dt$$

$$ddy = (v dz + z dv - \lambda dx - x d\lambda) dt$$

$$ddz = (\mu dx + x d\mu - v dy - y dv) dt$$

ou bien :

$$ddx = (y d\lambda - z d\mu) dt + (\lambda dy - \mu dz) dt$$

$$ddy = (z dv - x d\lambda) dt + (v dz - \lambda dx) dt$$

$$ddz = (x d\mu - y dv) dt + (\mu dx - v dy) dt$$

XLIV. Dans ces formules remettons pour dx , dy , dz , leurs valeurs données cy-dessus, & nous obtiendrons :

$$ddx = (y d\lambda - z d\mu) dt + (\lambda v z + \mu v y - (\lambda\lambda + \mu\mu)x) dt^2$$

$$ddy = (z dv - x d\lambda) dt + (\mu v x + \lambda \mu z - (v v + \lambda\lambda)y) dt^2$$

$$ddz = (x d\mu - y dv) dt + (\lambda \mu y + \lambda v x - (\mu\mu + v v)z) dt^2$$

Donc si les lignes $Z\alpha$, $Z\beta$, $Z\gamma$ sont tirées pour marquer les trois forces, qui sont requises à solliciter l'élément dM en Z selon les directions des trois axes OA , OB , OC , nous aurons pour ces forces les expressions suivantes.

$$\text{force } Z\gamma = \frac{2 dM}{dt} (y d\lambda - z d\mu) + 2 dM (\lambda v z + \mu v y - (\lambda\lambda + \mu\mu)x)$$

$$\text{force } Z\beta = \frac{2 dM}{dt} (z dv - x d\lambda) + 2 dM (\mu v x + \lambda \mu z - (v v + \lambda\lambda)y)$$

$$\text{force } Z\alpha = \frac{2 dM}{dt} (x d\mu - y dv) + 2 dM (\lambda \mu y + \lambda v x - (\mu\mu + v v)z)$$

XLV. Pour réduire ces expressions dans une somme, ou pour trouver les forces totales, il faut remarquer que dans ces intégrations on n'aura d'autres variables, que l'élément dM & les coordonnées

$x, y,$



x, y, z , qui déterminent le lieu de cet élément, & que dM doit successivement passer par tous les élémens du corps, de sorte que l'intégrale $\int dM$ rende la masse du corps entier M : ainsi dans toutes ces intégrations, qui ne regardent que la variabilité du point Z , les quantités λ, μ, ν , avec leurs différentiels $d\lambda, d\mu, d\nu$, & l'élément du tems dt seront à considérer comme invariables. De là il est clair que l'intégrale de chacune de ces trois forces deviendra $= 0$, puisque par la nature du centre de gravité O il est $\int x dM = 0, \int y dM = 0$ & $\int z dM = 0$. Donc, quelles que soient les forces requises à solliciter le corps, il faut qu'étant appliquées au centre de gravité O , chacune selon sa direction, elles se détruisent mutuellement.

XLVI. Donc, pour connoître exactement l'état de ces forces, il ne faut qu'avoir égard à leurs momens par rapport à nos trois axes OA, OB, OC . Or la force $Z\alpha$ donne pour l'axe OC un moment dans le sens $BA = Z\alpha.y$, & pour l'axe OB un moment dans le sens $CA = Z\alpha.x$. Ensuite la force $Z\beta$ donne pour l'axe OC un moment dans le sens $AB = Z\beta.z$, & pour l'axe OA un moment dans le sens $CB = Z\beta.x$. Enfin la force $Z\gamma$ donne pour l'axe OB un moment dans le sens $AC = Z\gamma.z$, & pour l'axe OA un moment dans le sens $BC = Z\gamma.y$. Par conséquent des forces $Z\alpha, Z\beta, Z\gamma$ résultera pour l'axe OA un moment dans le sens $BC = Z\gamma.y - Z\beta.x$; pour l'axe OB un moment dans le sens $CA = Z\alpha.x - Z\gamma.z$; & pour l'axe OC un moment dans le sens $AB = Z\beta.z - Z\alpha.y$.

XLVII. Si nous substituons pour ces forces les valeurs trouvées, le moment qui en résulte pour l'axe OA dans le sens BC sera

$$= \frac{2 dM}{dt} (yy d\lambda + xx d\lambda - yz d\mu - xz d\nu) \\ + 2 dM (\lambda\nu yz - \lambda\mu xz + \mu\nu yy - \mu\nu xx - (\mu\mu - \nu\nu) xy)$$

Le moment qui en résulte pour l'axe OB dans le sens CA sera

$$= \frac{2 dM}{dt} (xx d\mu + zz d\mu - xy d\nu - yz d\lambda) \\ + 2 dM (\lambda\mu xy - \mu\nu yz + \lambda\nu xx - \lambda\nu zz - (\nu\nu - \lambda\lambda) xz)$$

Enfin



Enfin le moment qui résulte pour l'axe OC dans le sens AB sera

$$= \frac{2 dM}{d\tau} (z z d\nu + y y d\nu - x z d\lambda - x y d\mu)$$

$$+ 2 dM (\mu\nu xz - \lambda\nu xy + \lambda\mu zz - \lambda\mu yy - (\lambda\lambda - \mu\mu) yz)$$

Or quand je dis qu'il y a un moment pour l'axe OC dans le sens AB, il faut entendre que la force de ce moment tend à tourner le corps autour de l'axe OC, & cela dans le sens AB.

XLVIII. Maintenant on n'aura qu'à prendre les intégrales de ces trois formules trouvées, pour avoir les momens tout entiers des forces, dont le corps doit être sollicité, afin que son mouvement soit tel, que nous venons de le supposer. Or ces intégrales se réduisent à l'intégration des formules, qui dépendent uniquement de la figure du corps & de la distribution de la matière dont il est composé, par rapport à nos trois axes fixes, OA, OB, OC. Supposons donc qu'il soit

$$\int dM (x x + y y) = M ff$$

$$\int x y dM = M ll$$

$$\int dM (x x + z z) = M gg$$

$$\int x z dM = M mm$$

$$\int dM (y y + z z) = M hh$$

$$\int y z dM = M nn$$

où il faut remarquer que M ff est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OA ; M gg le moment d'inertie par rapport à l'axe OB, & M hh le moment d'inertie par rapport à l'axe OC. Les trois autres formules contiennent les forces centrifuges, qu'auroit le corps, s'il tournoit autour d'un de ces trois axes.

XLIX. De là les momens totaux, dont le corps doit être sollicité, se trouveront exprimés de la manière suivante ;

I. Le moment pour l'axe OA dans le sens BC sera :

$$2M \left(\frac{ff d\lambda}{d\tau} - \frac{nn d\mu}{d\tau} - \frac{mm d\nu}{d\tau} + \lambda\nu n - \lambda\mu mm - (\mu\mu - \nu\nu) ll + \mu\nu (hh - gg) \right)$$

II. Le moment pour l'axe OB dans le sens CA sera

$$2M \left(\frac{gg d\mu}{d\tau} - \frac{ll d\nu}{d\tau} - \frac{nn d\lambda}{d\tau} + \lambda\mu ll - \mu\nu nn - (\nu\nu - \lambda\lambda) mm + \lambda\nu (ff - hh) \right)$$



III. Le moment pour l'axe OC dans le sens AB sera

$$2 M \left(\frac{hh \cdot v}{dt} - \frac{mm \cdot \lambda}{dt} - \frac{ll \cdot \mu}{dt} + \mu v mm - \lambda v ll - (\lambda \lambda - \mu \mu) nn + \lambda \mu (gg - ff) \right)$$

D'où l'on voit que ces momens de forces dépendent, tant des quantités λ, μ, ν , qui se rapportent à l'axe de rotation & au mouvement rotatoire, que de leurs changemens instantanés $d\lambda, d\mu, d\nu$, qui arrivent dans l'élément du tems dt .

L. Rapportons maintenant ces formules à l'axe de rotation qui soit Oz ; & nous avons vu qu'il sera $Ox = \nu u, xy = \mu u$ & $yz = \lambda u$; & que la vitesse angulaire autour de cet axe est $= V(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu)$; or en quel sens cette vitesse soit dirigée, on trouvera en considérant l'élément du corps situé en X, dont la vitesse à cause de $y = 0$ & $z = 0$ sera selon OB ou $XY = -\lambda x$ & selon OA $= \mu x$. Donc ce point s'élèvera au dessus du plan BOC, & de là on conclura aisément en quel sens le corps tourne autour de l'axe Oz . Soit maintenant la vitesse angulaire autour de cet axe $Oz = v$, de sorte que $V(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu) = v$. Ensuite soient ζ, η, θ les angles AOz, BOz, COz , que l'axe de Oz constitue avec les trois axes OA, OB, OC & puisque $Oz = u V(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu) = uv$, on aura $\cos \zeta = \frac{\lambda}{v}$; $\cos \eta = \frac{\mu}{v}$

& $\cos \theta = \frac{\nu}{v}$; d'où l'on voit qu'il y a toujours $\cos^2 \zeta + \cos^2 \eta + \cos^2 \theta = 1$: & ainsi on aura

$$\lambda = v \cos \zeta; \quad \mu = v \cos \eta; \quad \nu = v \cos \theta.$$

LI. Supposant donc pour la variabilité de l'axe de rotation Oz les angles ζ, η, θ variables, & outre cela la vitesse angulaire v variable, on obtiendra:

$$d\lambda = dv \cos \zeta - v d\zeta \sin \zeta; \quad d\mu = dv \cos \eta - v d\eta \sin \eta; \quad d\nu = dv \cos \theta - v d\theta \sin \theta$$

Or à cause de $\cos^2 \zeta + \cos^2 \eta + \cos^2 \theta = 1$ on aura

$$d\zeta \sin \zeta \cos \zeta + d\eta \sin \eta \cos \eta + d\theta \sin \theta \cos \theta = 0$$

Or puisque nos formules deviendroient trop compliquées par ces substitutions, & que la position de nos trois axes est arbitraire, posons qu'à



qu'à l'instant présent, ou au commencement de l'élément du tems dt , le corps ait tourné exactement autour de l'axe OA , de sorte que $\mu = 0$ & $\nu = 0$, & que partant le mouvement se fit dans le sens BC , avec la vitesse angulaire v , la valeur de λ étant affirmative. Il sera donc $\zeta = 0$; $\eta = 90^\circ$; $\theta = 90^\circ$; d'où $\lambda = v$; $\mu = 0$, $\nu = 0$; or après l'élément du tems dt , l'axe de rotation s'écarte infiniment peu de l'axe OA , de sorte qu'il fasse alors avec l'axe OA un angle $= \zeta$, avec l'axe OB un angle $= 90^\circ + d\eta$, & avec l'axe OC un angle $= 90^\circ + d\theta$; & il doit être $d\zeta^2 = d\eta^2 + d\theta^2$

LII. Dans cette supposition nous aurons donc :

$$d\lambda = dv; \quad d\mu = -v d\eta \quad \& \quad d\nu = -v d\theta.$$

Et ces valeurs étant substituées dans nos expressions précédentes du § 49 donneront.

I. Le moment requis pour l'axe OA dans le sens $BC =$

$$2 M \left(\frac{ff dv}{dt} + \frac{nn v d\eta}{dt} + \frac{mm v d\theta}{dt} \right)$$

II. Le moment requis pour l'axe OB dans le sens $CA =$

$$2 M \left(\frac{-nndv}{dt} - \frac{gg v d\eta}{dt} + \frac{ll v d\theta}{dt} + mm v v \right)$$

III. Le moment requis pour l'axe OC dans le sens $AB =$

$$2 M \left(\frac{-mmdv}{dt} + \frac{ll v d\eta}{dt} - \frac{hh v d\theta}{dt} - nn v v \right)$$

Où il faut remarquer que le mouvement rotatoire autour de l'axe AO est supposé se faire dans le sens BC , avec la vitesse angulaire $= v$.

LIII. Donc, pour que le corps tourne constamment autour du même axe OA , ou qu'il soit $d\eta = 0$ & $d\theta = 0$, mais d'un mouvement variable, il faut que ce corps soit sollicité par des forces, qui fournissent

I. Pour l'axe OA un moment dans le sens $BC = \frac{2 M ff dv}{dt}.$



II. Pour l'axe OB un moment dans le sens $CA = (mmvv - \frac{nn dv}{dt})$

III. Pour l'axe OC un moment dans le sens $BA = (nnvv + \frac{mm dv}{dt})$

D'où l'on voit que pour accélérer le mouvement rotatoire, il faut un moment de forces pour l'axe de rotation OA , lequel soit proportionnel à Mff , c'est à dire au moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OA . Mais, pour que le corps tourne autour de l'axe immobile OA d'un mouvement uniforme, il faut que ce corps soit sollicité de dehors par des forces, qui n'ayent aucun moment pour l'axe OA , mais qui donnent pour l'axe OB un moment dans le sens $CA = 2Mmmvv$, & pour l'axe OC un moment $= 2Mnnvv$. Donc ce mouvement ne saura subsister sans le secours de forces externes, à moins qu'il n'y soit $mm = 0$ & $nn = 0$, ou $\int xz dM = 0$ & $\int yz dM = 0$, ce qui est précisément le cas remarqué cy-dessus, où les forces centrifuges se détruisent mutuellement.

RECHERCHE DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ, LES FORCES DONT IL EST SOLLICITÉ ÉTANT DONNÉES.

Fig. IV. LIV. Le corps étant rapporté aux trois axes fixes OA, OB, OC , qui se coupent perpendiculairement au centre de gravité O , soit comme nous avons posé cy-dessus, nommant les coordonnées $OX = x, XY = y, YZ = z$, & l'élément du corps en $Z = dM$.

$$\begin{aligned} \int dM (xx + yy) &= Mff & \int xy dM &= Mll \\ \int dM (xx + zz) &= Mgg & \int xz dM &= Mmm \\ \int dM (yy + zz) &= Mhb & \int yz dM &= Mnn \end{aligned}$$

Cela posé, que le corps ait déjà un mouvement quelconque qui se fasse autour d'un axe Oz , de sorte que $Ox = vu$; $x\eta = \mu u$; $\eta z = \lambda u$, & que la vitesse rotatoire autour de cet axe soit $= V(\lambda\lambda + \mu\mu + \nu\nu)$.

LV. Dans



LV. Dans cet état le corps soit sollicité par des forces quelconques, & pour trouver le changement, qui en sera causé dans le mouvement du corps, on n'aura qu'à avoir égard aux momens des ces forces par rapport aux trois axes OA, OB, OC: soit donc le moment qui résulte de ces forces

pour l'axe OA dans le sens BC = Pa.

Le moment pour l'axe OB dans le sens CA = Qa.

Le moment pour l'axe OC dans le sens CO = Ra.

Maintenant égalant ces momens à ceux qui ont été trouvés cy-dessus (§. 49.) nous obtiendrons les trois équations suivantes.

$$I. \frac{Pa}{2M} = \frac{ff d\lambda}{d\tau} - \frac{nn d\mu}{d\tau} - \frac{mm dv}{d\tau} + \lambda v mm - \lambda \mu mm - (\mu\mu - \nu\nu) ll + \mu\nu (hh - gg)$$

$$II. \frac{Qa}{2M} = \frac{gg d\mu}{d\tau} - \frac{ll dv}{d\tau} - \frac{nn d\lambda}{d\tau} + \lambda \mu ll - \mu\nu mm - (\nu\nu - \lambda\lambda) mm + \lambda\nu (ff - hh)$$

$$III. \frac{Ra}{2M} = \frac{hh dv}{d\tau} - \frac{mm d\lambda}{d\tau} - \frac{ll d\mu}{d\tau} + \mu\nu mm - \lambda\nu ll - (\lambda\lambda - \mu\mu) mm + \lambda\mu (gg - ff)$$

d'où on pourra déterminer les changemens infiniment petits $d\lambda$, $d\mu$ & dv , qui seront produits dans l'élément du tems $d\tau$.

LVI. Mais, puisque la résolution de ces équations nous conduiroit à des formules trop longues, posons, comme nous avons fait auparavant, que le corps tourne à l'instant présent autour de l'axe OA dans le sens BC avec une vitesse angulaire = v : & qu'après le tems = $d\tau$, l'axe de rotation change, en sorte qu'il fasse alors avec l'axe OA un angle = $d\zeta$, avec l'axe OB un angle = $90^\circ + d\eta$ & avec l'axe OC un angle = $90^\circ + d\theta$; & que la vitesse angulaire devienne alors = $v + dv$: & nous avons vu qu'il est $d\zeta^2 = d\eta^2 + d\theta^2$. Cela supposé, nous aurons les trois équations suivantes:

$$I. \frac{Pa}{2M} = \frac{ff dv}{d\tau} + \frac{nn v d\eta}{d\tau} + \frac{mm v d\theta}{d\tau}.$$



$$\text{II. } \frac{Qa}{2M} = \frac{-nndv}{dt} - \frac{ggv d\eta}{dt} + \frac{lv d\theta}{dt} + mmvv$$

$$\text{III. } \frac{Ra}{2M} = \frac{-mm dv}{dt} + \frac{llv d\eta}{dt} - \frac{hlv d\theta}{dt} - nnvv$$

LVII. Maintenant la résolution de ces trois équations nous fournira pour dv , $d\eta$ & $d\theta$ les valeurs suivantes :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Pa(gghb - l^4) + Qa(bhm + lmm) + Ra(ggm + lnn) - 2Mvv(mmn(bb - gg) + l(m^4 - n^4))}{2M(ffggbb - fl^4 - ggm^4 - hbn^4 - 2llmmnn)}$$

$$\frac{v d\eta}{dt} = \frac{Pa(hbn + lmm) + Qa(bb - m^4) + Ra(ffl + mnn) - 2Mvv(ffhbm - flnn - mm(m^4 + n^4))}{2M(ffggbb - fl^4 - ggm^4 - hbn^4 - 2llmmnn)}$$

$$\frac{v d\theta}{dt} = \frac{Pa(ggm + lnn) + Qa(ffl + mnn) + Ra(ffg - n^4) + 2Mvv(ffggn - flmm - nn(m^4 + n^4))}{2M(ffggbb - fl^4 - ggm^4 - hbn^4 - 2llmmnn)}$$

De ces formules donc on connoitra pour chaque instant le changement élémentaire, qui arrivera tant dans la position de l'axe de rotation, que dans la vitesse angulaire. Or il faut pour chaque instant changer la position des trois axes OA, OB, OC afin que OA convienne toujours avec l'axe de rotation : & alors on sera obligé de calculer de nouveau pour chaque instant les valeurs ll , mm , nn , ff , gg , hh ; puisque le changement de la situation du corps par rapport aux trois axes y causera des variations continuelles.

LVIII. Ce seront donc ces trois formules, qui contiennent les nouveaux principes de Mécanique, dont on a besoin pour déterminer le mouvement des corps solides, lorsque l'axe de rotation, autour duquel ils tournent, ne demeure pas immobile, ou dirigé vers la même plage du Ciel, ou de l'espace absolu. Et il est évident que ces nouveaux principes sont suffisans pour tous les cas imaginables des mouvemens, dont les corps solides sont susceptibles. Or jusqu'ici on n'a été en état que de résoudre ce cas fort particulier, où il est pour le corps $m = 0$ & $n = 0$, & ensuite pour les forces sollicitantes $Q = 0$

& $R = 0$: Mais pour ce cas on aura $\frac{dv}{dt} = \frac{Pa}{2Mff}$, & $d\eta = 0$ & $d\theta = 0$:



$d\theta = 0$: d'où l'on voit combien sont bornées les recherches de Mécanique, sans le secours de ces nouveaux principes, que je viens de déduire de l'axiome général, sur lequel est fondée toute la Mécanique.

LIX. Comme les formules qui contiennent ces principes, sont trop embarrassées, pour en pouvoir faire voir clairement leur nature ; il fera à propos d'en faire l'application à une certaine espèce de corps, où ces formules deviennent assez simples. Supposons donc que le corps solide, dont il s'agit de déterminer le mouvement, soit un globe formé d'une matière homogène, ou du moins des couches sphériques concentriques, dont chacune soit homogène. Dans ce cas il est clair, que les momens d'inertie Mff , Mgg , Mhh par rapport à chaque axe seront égaux entr'eux, & partant $gg = hh = ff$; de plus il sera toujours $ll = 0$, $mm = 0$, & $nn = 0$. Donc les trois formules, qui renferment le changement du mouvement causé par les trois momens Pa , Qa , Ra seront :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Pa}{2Mff}; \quad \frac{vd\eta}{dt} = \frac{-Qa}{2Mgg} \quad \& \quad \frac{vd\theta}{dt} = \frac{-Ra}{2Mhh}$$

dont la raison ne sera plus difficile à comprendre.

LX. Les deux axes OB & OC étant arbitraires, pourvu qu'ils soient dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation OA , on les peut toujours arranger en sorte, que les momens de forces par rapport à un d'eux se détruisent. Soient donc ces axes OB & OC tellement choisis que le moment par rapport à OC évanouisse, ou qu'il

soit $R = 0$: nous aurons donc $\frac{dv}{dt} = \frac{Pa}{2Mff}; \quad \frac{vd\eta}{dt} = \frac{-Qa}{2Mgg}$

& $d\theta = 0$, d'où nous voyons que l'axe OA approchera de l'axe OB

par un angle infiniment petit $-d\eta = \frac{Qa dt}{2Mggv}$ dans le tems dt ; car

puisque $d\theta = 0$, c'est un signe que l'axe de rotation demeure perpendi-



pendiculaire à l'axe OC. Donc c'est le moment de forces, qui tend à tourner le corps autour de l'axe OB dans le sens CA, duquel est produite l'inclinaison de l'axe de rotation OA vers l'axe OB, pendant que le corps tourne autour de OA dans le sens BC, & cette inclinaison est réciproquement proportionnelle à la vitesse rotatoire du corps autour de son axe de rotation.

Fig. V.

LXI. Soient pour mieux représenter cela OA, OB, OC les trois axes, autour du premier desquels OA le corps sphérique que je considère ici, tourne dans le sens BC avec une vitesse angulaire $= v$. Que ce corps soit sollicité par deux forces P & Q, dont la première P lui soit appliquée en B selon la direction BP parallèle à OC, & l'autre Q en C selon la direction CQ parallèle à OA, de sorte que les distances soient $OB = a$ & $OC = a$. Cela posé, la première force n'aura pas d'autre moment que par rapport à l'axe OA, & ce moment sera $= Pa$ dans le sens BC; or l'autre force CQ $= Q$ n'aura pas d'autre moment que par rapport à l'axe OB, & ce moment sera $= Qa$ dans le sens CA. Maintenant le moment d'inertie du corps par rapport à un axe quelconque, qui passe par son centre de gravité étant posé $= Mff$: l'effet de la première force P consistera dans l'accélération du mouvement rotatoire, donnant $dv = \frac{Pa dt}{2Mff}$; & l'effet de l'autre force Q fera incliner l'axe de rotation OA vers OB, & le transportera en Oa, de sorte que l'angle A O a $= \frac{Qa dt}{2Mffv}$.

Fig. VI.

LXII. On comprendra mieux le fondement de ces effets, si nous regardons la superficie sphérique BCD du corps, dont le rayon soit $OB = OC = OA = a$, & qui tourne autour de l'axe OA dans le sens BC avec la vitesse rotatoire $= v$. Soit BP la force P, qui accélère le mouvement de rotation, autour de l'axe OA; & on voit que cette force produit le même effet, que si l'autre force Q n'agissoit point sur le corps; donc cet effet est connu par les principes vulgai-



vulgaires, desquels il doit être $dv = \frac{P a dt}{2 M ff}$. Considerons l'autre force Q appliquée en A selon la direction AQ parallele à CO, car il est évident que cette force produira le même moment, que si elle étoit appliquée en C selon une direction parallele à OA. L'effet donc de cette force consistera en ce qu'elle transportera l'axe de rotation OA en Oa par l'angle $AOa = \frac{Q a dt}{2 M ff v}$.

LXIII. Pour donner une explication de cet effet, qu'on considere d'abord le seul mouvement de rotation, par lequel le point a sera transporté autour de A en α , par l'angle $\alpha A \alpha$ dans le tems dt : la vitesse angulaire étant $= v$, cet angle $\alpha A \alpha$ sera $= v dt$; & partant l'espace $a\alpha = Aa \cdot v dt$. Ensuite faisons abstraction du mouvement rotatoire, & considerons le corps, comme s'il étoit sollicité par la seule force AQ $= Q$, qui lui imprimera un mouvement de rotation autour de l'axe BOD, dans le sens CA ou αa ; & la vitesse rotatoire engendrée dans le tems dt sera $= \frac{Q a dt}{2 M ff}$: donc dans le tems dt ce mouvement se fera par un angle $= \frac{Q a dt^2}{2 M ff}$. Par ce mouvement le point α sera retiré vers a par un espace $= \frac{Q a a dt^2}{2 M ff}$; & il est clair que le point α doit exactement être rétabli en a, afin que ce soit le point a & l'axe Oa qui demeure en repos. De là nous aurons $a\alpha = Aa \cdot v dt = \frac{Q a a dt^2}{2 M ff}$, & partant $\frac{Aa}{AO} = \text{angl. } AOa = \frac{Q a dt}{2 M ff v}$; ce qui est la même expression qui a été déduite de nos principes.

