DE LA CONTROVERSE ENTRE *Mrs. LEIBNITZ* & *BERNOULLI*

SUR LES LOGARITHMES

DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES.

PAR M. EULER.

Quoique la doctrine des logarithmes ſoit ſi ſolidement établie, que les vérités, qu'elle renferme, ſemblent auſſi rigoureuſement demontrées que celles de la Geometrie; les Mathematiciens ſont pourtant encore fort partagés ſur la nature des logarithmes des nombres négatifs & imaginaires: & quand on ne trouve pas cette controverſe fort agitée, la raiſon en eſt apparemment, qu'on n'a pas voulu rendre ſuſpecte la certitude de tout ce, qu'on avance dans les parties pures de la Mathematique, en developant devant les yeux de tout le monde les difficultés, & meme les contradictions, auxquelles les ſentimens des Mathematiciens ſur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires ſont aſſujettis. Car, bien que leurs ſentimens puiſſent étre fort differens ſur des queſtions, qui regardent la Mathematique appliquée, où les diverſes manieres d'enviſager les objets & de les ramener à des idées preciſes, peuvent donner lieu à des controverſes réélles; on a toujours prétendu, que les parties pures de la Mathematique étoient entierement délivrées de tout ſujet de diſpute, & qu'il ne s'y trouvoit rien, dont on ne fut en état de démontrer, ou la vérité ou la fausseté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient sans contredit à la Mathematique pure, on sera bien surpris d'apprendre, qu'elle ait été jusqu'ici assujettie à des controverses tellement embarrassées, que de quelque parti qu'on se déclare, on tombe toujours en des contradictions, qu'il semble tout à fait impossible de lever. Cependant si la vérité doit se soutenir partout, il n'y a aucun doute, que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent, ne peuvent etre qu'apparentes, & qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la verité, quoique nous ne sachions point, de quel endroit nous puissions tirer ces moyens.

Cette controverse sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires se trouve agitée avec assez de force dans le Commerce litteraire entre M. Leibnitz & M. Jean Bernoulli. Ces deux grands Mathematiciens, à qui nous sommes pour la pluspart redevables de l'Analyse des infinis, furent tellement partagés sur cet article, qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord là dessus; quoique l'un & l'autre n'ait eu en vuë que la vérité, & qu'ils fussent egalement eloignés de soutenir leurs sentimens avec opiniatreté. Mais chacun a trouvé dans le sentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaisance trop outrée, si l'un avoit changé son sentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions, que ces deux Grands hommes se reprochoient, etoient réelles, & point du tout du nombre de celles, qui ne paroissent telles, qu'à la partie opposée, entêtée de son propre sentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverse dans tout son jour, j'exposerai ici séparément les sentimens de M. Bernoulli & de M. Leibniz; j'y ajouterai ensuite tous les argumens, dont chacun s'est servi pour maintenir son sentiment: & enfin je détaillerai les objections, qu'on peut faire, tant contre les argumens, que contre chaque sentiment meme, & je ferai sentir en toutes leurs forces toutes les contradictions,

aux-

auxquelles l'un & l'autre de ces deux ſentimens eſt aſſujetti, afin qu'on ſoit d'autant mieux en état de juger, combien il doit être difficile de découvrir la verité, & de la garantir contre toutes les objections, aprés que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

Sentiment de Mr. Bernoulli.

Mr. Bernoulli ſoutint, que les logarithmes des nombres négatifs étoient les memes que ceux des nombres affirmatifs: ou que le logarithme du nombre negatif $-a$ *étoit égal au logarithme du nombre affirmatif* $+a$. *Ainſi le ſentiment de M. Bernoulli porte qu'il y a* $l-a = l+a$.

M. Leibniz a donné occaſion à cette declaration de M. Bernoulli, lorsqu'il avança dans la CXC Epitre du Commerce, que la raiſon de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la meſure de cette raiſon, c. à d. le logarithme de -1, qui eſt l'expoſant de cette raiſon, étoit imaginaire. Là deſſus M. Bernoulli declara dans la CXCIII Epitre qu'il n'etoit point de meme avis, & qu'il croyoit même, que les logarithmes des nombres negatifs étoient non ſeulement réels, mais auſſi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris poſitivement. Mr. Bernoulli fortifia auſſi ſon ſentiment par les raiſons ſuivantes.

1. *Raiſon.* Pour prouver que $l-x = l+x$, quelque nombre qu'on marque par x, il recourt aux differentiels; & puisque le differentil de $l-x$ eſt $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ de méme que celui de $l+x$, il en conclut, que ces quantités mêmes $l-x$ & $l+x$, dont les differentiels ſont égaux, doivent être égales entr'elles, & partant qu'il eſt $l-x = l+x$.

2. *Raiſon.* Cette raiſon eſt tirée de la nature de la courbe logarithmique. Pour la faire mieux comprendre, ſoit VBM une logarithmique décrite ſur l'axe OAP, qui eſt en méme tems ſon aſymtote. Soit la ſoutangente de cette logarithmique, qui eſt, comme on ſait, con- PLANCHE I. *Fig. I.*

S 3 ſtante

ſtante, $=1$; & que l'appliquée fixe AB ſoit auſſi $=1$. Cela poſé, ſi l'on nomme une abſciſſe quelconque $AP=x$, priſe depuis le point fixe A, & l'appliquée qui y repond $PM=y$, on ſait que x exprime le logarithme de y, ou que $x=ly$. Donc prenant les differentiels, on aura pour cette courbe logarithmique cette équation differentielle $dx=\frac{dy}{y}$ ou $y\,dx=dy$. Cette équation demeurant la même, quoiqu'on mette $-y$ au lieu de y, M. Bernoulli conclut de là, que cette courbe VBM eſt accompagnée, en vertu de la loi de continuité, de la branche vbm, qui lui eſt égale & ſemblable, étant ſituée de l'autre part de l'axe OP, de ſorte que cet axe ſoit en même tems un diametre de la courbe entiere. Et partant, puiſque la même abſciſſe AP répond également aux deux appliquées PM & Pm, dont l'une eſt la negative de l'autre, de ſorte que poſant $PM=y$ il eſt $Pm=-y$; il s'enſuit que x eſt auſſi bien le logarithme de $-y$ que de $+y$, par conſéquent $l-y=l+y$.

3. *Raiſon.* Comme tout revient à prouver que la logarithmique eſt compoſée de deux branches égales, ſituées de part & d'autre de l'aſymtote OP, M. Bernoulli apporte encore une autre raiſon, qui eſt, qu'en conſidérant les courbes compriſes dans cette équation plus générale $dx=\frac{dy}{y^n}$, on eſt d'accord, que toutes ces courbes, lorſque l'expoſant n eſt un nombre impair, ont deux branches telles, que l'axe, ſur lequel ſont priſes les abſciſſes x, en eſt un diametre. Donc il faut que cette propriété ait auſſi lieu, ſi $n=1$; or dans ce cas on aura la logarithmique de l'article précedent; d'où il s'enſuit donc, que tant le logarithme de $PM=+y$, que le logarithme de $Pm=-y$ eſt le même $=AP=x$.

4. *Raiſon.* Puiſqu'il eſt certain par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puiſſance quelconque p^n eſt égal au logarithme de la racine p multipliée par l'expoſant n, ou que $lp^n=nlp$; il s'enſuit

suit, que prenant pour p un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = n\,l(-a)$. Soit $n=2$, & il sera $l(-a)^2 = 2\,l(-a)$. Or parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = l\,a^2 = 2\,l\,a$; d'où il s'ensuit que $2\,l(-a) = 2\,l\,a$, & partant $l-a = l+a$. Cela se montre plus promtement de cette maniere: Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il sera $l(-a)^2 = l(+a)^2$, ou bien $2\,l-a = 2\,l+a$, & par conséquent $l-a = l+a$.

Toutes les autres raisons, qu'on peut alleguer pour prouver ce sentiment, se réduisent aisement à une des quatre, que je viens d'exposer. Je m'en vai donc étaler les objections, qu'on fait contre ce sentiment, & les raisons dont il est appuyé.

1. *Objection.* M. Leibniz opposa contre la premiere raison; que la regle de differentier le logarithme d'une quantité variable x, en divisant le differentiel de x par la quantité même x n'avoit lieu, que lorsque x marquoit une quantité positive, de sorte qu'on se trompoit en posant le differentiel de $l-x$ egal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or il faut avoüer, que cette objection est non seulement extrêmement foible, n'étant soutenue par aucune raison valable; mais qu'elle renverseroit tout à fait le calcul differentiel des logarithmes. Car comme ce calcul roule sur des quantites variables c. à. d sur des quantités considérées en général, s'il n'etoit pas vrai généralement, qu'il fut $d.\,l\,x = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à x, soit positive, ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais se servir de cette régle: la vérité du calcul differentiel étant fondée sur la généralité des regles, qu'il renferme. Or M. Leibniz n'auroit pas eu besoin de se tenir à cette objection pour maintenir son sentiment, puisqu'il auroit pu attaquer la raison de M. Bernoulli par une objection beaucoup plus forte, que voilà.

2. *Objection.* Mr. Bernoulli voulant prouver par l'egalité des differentiels, qu'il etoit $l-x = l+x$, prouveroit par le même raisonnement

nement que $l2x = lx$; car le differentiel de $l2x$ est $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$, tout comme celui de lx. Et partant si le raisonnement de M. Bernoulli étoit juste, il s'ensuivroit que non seulement $l-x = l+x$, mais aussi que $l2x = lx$ & en géneral que $lnx = lx$, quelque nombre que marque n: conséquence, que M. Bernoulli lui méme n'accorderoit jamais. Or on sait que, lorsque les differentiels de deux quantités variables sont égaux, il n'en suit pas davantage, que ce, que ces quantités variables different entr'elles d'une quantité constante; & on n'en sauroit conclure, qu'elles fussent égales. Ainsi quoique le differentiel de $x+a$ soit $= dx$ aussi bien que celui de x, la conséquence seroit bien fausse, si l'on en vouloit conclure que $x+a = x$. Par cette raison il est donc clair, que puisque le differentiel de $l-x$ & de $l+x$ est le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $l-x$ & $l+x$ ne different entr'elles que d'une quantité constante, ce qui est egalement évident, vuque $l-x = l-1+lx$. Et de là on comprend aussi aisément, que puisque $lnx = lx+ln$, le differentiel de lnx doit être égal au differentiel de lx. Il est vrai que M. Bernoulli suppose $l-1 = 0$, de méme qu'il est $l1 = 0$, de sorte qu'il seroit $l-x = lx+l-1 = lx$. Mais comme c'est précisément ce que M. Bernoulli veut prouver par ce raisonnement, on voit bien que cette supposition ne peut pas être admise.

3. *Objection.* On peut opposer la même chose contre la seconde raison de M. Bernoulli, quand il veut prouver par l'equation differentielle de la Logarithmique $ydx = dy$, que cette courbe a deux branches semblables situées de part & d'autre de l'axe. Car non seulement cette équation demeure la méme, si l'on met $-y$ au lieu de y, mais aussi si l'on met $2y$, ou en général ny pour y; d'où il suivroit que cette courbe eut une infinité de branches, & que l'abscisse x fut le logarithme commun, non seulement de y & de $-y$, mais aussi de $2y$, & en général de ny, quelque nombre que soit n. Ainsi par la même raison, qu'on est en droit de nier l'infinité des branches de la Logarithmique, on niera aussi l'existence des deux branches, que M. Bernoulli veut établir.

4. *Ob-*

4. *Objection.* Cette objection est encore dirigée contre les deux branches de la courbe logarithmique. Car quoique qu'on puisse surement conclure l'existence d'un diametre d'une courbe, lorsque son équation entre les coordonnées x & y est telle, qu'elle demeure inalterée, si l'on met $-y$ à la place de y. Cependant ce critere n'est juste, que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique, ou renfermée en termes finis. Car on sait qu'une équation differentielle est beaucoup plus générale, que l'équation finie d'où elle a été tirée, & qu'elle renferme une infinité de courbes, qui ne sont pas comprises dans l'equation finie. Ainsi l'équation de la parabole $yy = ax$ a pour differentielle $2y\,dy = a\,dx$; mais cette même équation differentielle convient également à cette équation générale $yy = ax \pm ab$, qui renferme à la fois une infinité de paraboles. Il en est de meme de l'equation differentielle de la logarithmique $y\,dx = dy$, qui convient aussi bien à cette équation finie $x = lny$, qu'a celle-cy $x = ly$, qu'on a pourtant uniquement en vuë. De là il s'ensuit qu'on ne peut pas juger de la forme d'une courbe, en ne considerant que son équation differentielle.

5. *Objection.* Celle-cy regarde la troisieme raison, qui est sans doute beaucoup plus forte. Car si toutes les courbes comprises dans cette équation generale $dx = \frac{dy}{y^n}$, où n marque un nombre impair, sont douées d'un diametre, la même propriété doit avoir lieu, si $n = 1$, ce qui est le cas de la logarithmique. Mais puisque cette propriété n'est evidente, qu'entant qu'on considere les équations integrales de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, qu'on peut toujours assigner algébriquement hormis le cas $n = 1$; de meme maniere qu'on doit excepter ce cas, lorsque la question roule sur l'intégrabilité de l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$, on sera en droit de faire la même exception, lorsqu'il s'agit du jugement d'un diametre. Donc, si l'on ne peut pas prouver par quelque

autre raison, que la logarithmique ait un diametre, cet argument tiré de l'équation générale $dy = \frac{dy}{y^n}$ n'est pas convaincant. Pour en montrer plus clairement l'insuffisance, je ferai voir même dans les courbes algébriques des cas, où une équation générale renferme des courbes toutes douées d'un diametre, & que néantmoins il en faut excepter un cas particulier. Qu'on considere cette équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$, & on ne doutera pas de conclure, que les courbes exprimées par cette équation n'ayent un diametre, puisqu'en réduisant l'equation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ à la rationalité, on obtient une équation du huitieme degré, où tous les exposans de y sont des nombres pairs. Cependant quelque sure que paroisse cette conclusion, il en faut pourtant excepter le cas où $b = o$; car alors l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3 x}$ étant delivrée des signes radicaux ne monte qu'au quatrieme degré devenant:

$$y^4 - 2axyy - 4aaxy + aaxx - a^3x = o$$

laquelle à cause du terme $4aaxy$ est destituée de diametre. De tout cela il s'ensuit donc, que cet argument de M. Bernoulli n'est pas assez rigoureux pour demontrer son sentiment.

6. *Objection.* Je passe à la quatrieme raison de M. Bernoulli, qui est sans doute la plus forte; car on ne sauroit revoquer en doute aucun article, qui y sert de fondement, sans renverser les principes les mieux établis de l'analyse & de la doctrine des logarithmes. Car on ne sauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute, que leurs logarithmes ne soient égaux c.à d. $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Ensuite il est également certain qu'il est en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l-a$ & $l(+a)^2 = 2l+a$: & partant il sera sans contredit $2l-a = 2l+a$. Les moitiés de ces deux quantités seront donc aussi incontestablement égales entr'elles, & par conséquent il sera $l-a = la$, tout comme M. Bernoulli le soutient. Mais si ce raison-

raisonnement est juste, on en tirera aussi d'autres conséquences, que personne, & encore moins M. Bernoulli, ne sauroit accorder : car on prouvera de la même façon, que les logarithmes des quantités imaginaires seroient aussi bien réels, que ceux des nombres negatifs. Car il est certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il sera aussi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, & deplus $4\,l(a\sqrt{-1}) = 4\,la$, par conséquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puisqu'il est $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il sera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, & partant $3\,l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3\,la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne sauroit admettre sans renverser toute la doctrine des logarithmes.

Il seroit donc, selon le systeme de M. Bernoulli, non seulement $l-1 = l\,1 = 0$, mais aussi $l\sqrt{-1} = 0$; $l-\sqrt{-1} = 0$; & $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or M. Bernoulli ayant si heureusement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, si le logarithme de $\sqrt{-1}$ etoit $= 0$, toute cette belle découverte seroit fausse; par laquelle il a fait voir, que le rayon est à la quatrieme partie de la circonference, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc posant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, il sera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, & partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui seroit absurde s'il etoit $l\sqrt{-1} = 0$. Il n'est pas donc vray que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque solide que paroisse la 4^me raison, elle doit être sujette à caution, puisqu'il en suivroit aussi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conséquent on ne peut pas dire, que le sentiment de M. Bernoulli soit suffisament prouvé.

Il est ici fort étonnant, que, soit qu'on embrasse le sentiment de M. Bernoulli, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embarras inſurmontables, & même en des contradictions. Car ſi l'on ſoutient que $l-a = l+a$ ou $l-1 = l+1 = 0$, on eſt obligé d'avouër qu'il eſt auſſi $l\sqrt{-1} = 0$, puiſque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\, l-1$. Or il ſeroit non ſeulement abſurde de ſoutenir, que les logarithmes des quantités imaginaires ne ſoient pas imaginaires, mais il ſeroit auſſi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui eſt néantmoins rigoureuſement prouvé. Ainſi en ſe declarant pour le ſentiment de M. Bernoulli, on tombe en contradiction avec des verités très ſolidement établies.

Poſons que le ſentiment de M. Bernoulli ſoit faux, & qu'il n'y ait point $l-1 = 0$; car c'eſt à quoi ſe réduit le ſentiment de M. Bernoulli; & on ſera obligé d'accuſer de fauſſeté quelcune des opérations ſur leſquelles le raiſonnement de la 4me raiſon eſt fondé : ce qu'on ne pourra faire non plus ſans tomber en contradiction avec d'autres vérités demontrées. Pour rendre cela plus évident, ſoit $l-1 = \omega$, & s'il n'eſt pas $\omega = 0$, ſon double 2ω ne ſera non plus $= 0$, or 2ω eſt le logarithme du quarré de -1, lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne ſeroit plus $= 0$, ce qui eſt une nouvelle contradiction. De plus $-x$ eſt auſſi bien $= -1 . x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l-x = lx + l-1 = lx - l-1$: il ſeroit donc $l-1 = -l-1$, ſans qu'il fut $l-1 = 0$; or c'eſt une contradiction de dire qu'il ſoit $+a = -a$ ſans qu'il ſoit $a = 0$.

Soit donc qu'on diſe l'une ou l'autre de ces deux choſes, ou que le ſentiment de M. Bernoulli eſt vrai, ou qu'il eſt faux, on ſe plonge également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant il faut abſolument, ou que ce ſentiment ſoit vrai, ou qu'il ſoit faux, & il ne paroit point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de ſe tirer d'affaire & de ſauver la vérité contre de ſi grandes contradictions? Je paſſe à l'examen du ſentiment de M. Leibniz.

Senti-

Sentiment de M. Leibniz.

M. Leibniz soutint que les logarithmes de tous les nombres negatifs, & à plus forte raison ceux des nombres imaginaires, etoient imaginaires: ou puisque $l-a = la + l-1$, il soutint que $l-1$ etoit une quantité imaginaire.

J'ai déja remarqué que M. Leibniz soutenoit, que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme de cette raison ou $l-1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le systeme de M. Bernoulli servent à fortifier ce sentiment, & que les raisons alleguées pour le sentiment de M. Bernoulli doivent être contraires à celui de M. Leibniz. Cependant on peut apporter des raisons particulieres pour confirmer le sentiment de M. Leibniz, qui feront le sujet de mon examen, qui suit:

1. *Raison.* Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1+x$ est égal à la somme de cette serie:

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \&c.$$

d'où l'on voit dabord que si $x = 1$, il doit être $l1 = o$. Maintenant pour avoir le logarithme de -1, il faut mettre $x = -2$, d'où l'on obtient.

$$l-1 = -2 - \tfrac{1}{2}.\ 4 - \tfrac{1}{3}.\ 8 - \tfrac{1}{4}.\ 16 - \tfrac{1}{5}.\ 32 - \tfrac{1}{6}.\ 64 - \&c.$$

Or il n'y a aucun doute, que la somme de cette serie divergente ne sauroit être $= o$; donc il est certain que $l-1$ n'est pas $= o$. Le log. de -1 sera donc imaginaire, puisqu'il est d'ailleurs clair, qu'il ne sauroit être réel, c. à d. ou positif, ou negatif.

2. *Raison.* Soit $y = lx$, & posant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, dont la valeur approchée est, comme on sait, $e = 2,718281828459$; puisqu'il sera $y\,le = 1\,lx$, on en tirera $x = e^y$. Ainsi le logarithme du nombre x étant l'exposant d'une puissance de e qui est égale au nombre x, il est clair, qu'aucun exposant réel d'une puissance de e ne sauroit produire un nombre negatif: &

 partant

partant pour que e^y devienne $= -1$, ni $y = o$, ni aucun nombre réel mis pour y ſauroit remplir cette condition. Et poſant en général pour x un nombre negatif $-a$, dont on ſuppoſe le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ ſera toujours impoſſible, ou la valeur de y imaginaire.

3. *Raiſon.* Puisqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette ſerie infinie :

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

qui eſt toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y, de ſorte que les objections tirées de la nature des ſuites divergentes, comme dans la premiere raiſon, ne trouvent pas lieu ici. Ainſi le logarithme du nombre x étant poſé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

& partant ſi y marque le logarithme de -1, ou qu'il ſoit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

à laquelle, comme il eſt d'abord clair, ne ſauroit ſatisfaire la valeur $y = o$, vu qu'il en réſulteroit $-1 = +1$. Par conſéquent il eſt certain que le logarithme de -1 n'eſt pas $= o$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raiſons, puisque les autres argumens, par lesquels on peut confirmer le ſentiment de Mr. Leibniz, ſont déja contenus dans les objections faites contre le ſyſteme de Mr. Bernoulli. Cependant ces trois raiſons que je viens d'expoſer, ſont ſujettes aux objections ſuivantes.

1. *Objection.* Contre la premiere raiſon on dira d'abord, que l'accroiſſe-

l'accroiſſement continuel des termes, qui ſont tous negatifs, de cette ſuite :

$$-2-\tfrac{1}{2}.\ 4-\tfrac{1}{3}.\ 8-\tfrac{1}{4}.\ 16-\tfrac{1}{5}.\ 32-\tfrac{1}{6}.\ 64-\&c.$$

n'eſt pas une marque ſeure que la ſomme de cette ſuite ne ſauroit être $= o$. Car ſi cette ſerie geometrique

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-\&c.$$

donne pour le cas $x=-2$, celle-cy

$$-1 = 1+2+4+8+16+32+64+\&c.$$

& pour le cas $x=-3$ celle-cy.

$$-\tfrac{1}{2} = 1+3+9+27+81+243+\&c.$$

pourquoi, dira-t-on, ne feroit il pas poſſible, que la ſomme d'une ſerie, dont les termes croiſſent ayant par tout le meme ſigne, ne fut $= o$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'à ajouter à la derniere ſerie termes pour termes, celle-cy :

$$\tfrac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1-1+\&c.$$

& on aura effectivement :

$$o = 2+2+10+26+82+242+730+\&c.$$

Donc ſi la ſomme de cette ſerie, eſt $=o$, quelle abſurdité feroit il donc de ſoutenir, qu'il fut auſſi

$$o = -2-\tfrac{1}{2}.\ 4-\tfrac{1}{3}.\ 8-\tfrac{1}{4}.\ 16-\tfrac{1}{5}.\ 32-\tfrac{1}{6}.\ 64-\&c.$$

& partant la premiere raiſon n'eſt pas convainquante.

2. *Objection.* La ſeconde raiſon eſt telle, qu'on pourroit auſſi s'en ſervir pour prouver le ſentiment oppoſé. Car puiſqu'il y a $x = e^y$ ſuppoſant y le logarithme du nombre x, toutes les fois que y eſt une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouer qu'alors la valeur de e^y & partant auſſi de x, eſt auſſi bien negative qu'affirmative. Ainſi ſi $\frac{m}{2n}$, eſt un logarithme, le nombre x qui lui répond

étant

étant $e^{m:2n} = \sqrt{e^{m:n}}$, fera tant affirmatif que negatif; de forte que dans ce cas tant x que $-x$ aura le méme logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puisque les logarithmes ne font pas des nombres rationels, & par conféquent équivalens à des fractions, dont les numérateurs & dénominateurs font infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs; il s'enfuit que le meme logarithme, qui convient au nombre pofitif $+x$, conviendra auffi au nombre negatif $-x$.

3. *Objection.* La troifieme raifon eft fans doute la plus forte, puisqu'elle femble exclure abfolument les nombres negatifs du nombre de ceux, à qui répondent des logarithmes réels. Car il eft clair que quelque nombre réel qu'on mette pour y, la valeur de cette ferie

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

ne fauroit jamais devenir negative, de forte qu'aucun logarithme réel ne fauroit repondre à un nombre negatif. Cependant cette ferie n'etant vraïe, qu'entant qu'elle decoule de la formule finie e^y, les objections précedentes ont ici également lieu. Car fi e^y peut donner un nombre negatif, il importe fort peu, fi la ferie qui lui eft égale en donne auffi un ou non? Pour reconnoitre cela, on n'a qu'à confiderer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui eft auffi bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique la ferie égale

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \&c.$$

ne donne que fa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x.

M. Leibniz ne manqueroit pas de répondre à ces objections; & comme la premiere ne prouve pas le contraire de fon fentiment, & qu'elle qu'elle ne rend que douteuſe la premiere raiſon, il ne perdroit rien de renoncer à cette premiere raiſon, & de s'en tenir principalement aux autres. Car au fond la ſeconde objection ne détruit point ſon ſentiment, qui ſe réduit uniquement à prouver que $l-1$ n'eſt pas $=o$: or la ſeconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que ſi e^y doit étre $=-1$, l'expoſant y ne ſauroit étre aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le ſigne radical puiſſe fournir une valeur negative. Car on conviendra aiſément, que ſoit qu'on mette pour y un nombre affirmatif plus grand que zero, ou un nombre negatif quelconque pour y, la valeur de la puiſſance e^y ne devient jamais $=-1$. Donc ſi y n'eſt pas imaginaire, il faudroit qu'il fut $e^y=-1$ dans le cas $y=o$. Mais dans ce cas évanouït toute ambiguité de ſignes, qui pourroit avoir lieu à cauſe des ſignes radicaux, & il eſt indubitablement $e^o=+1$. Et ſi l'on vouloit dire, qu'on put regarder o comme $\frac{o}{2}$, & e^o comme $\sqrt{e^o}=\sqrt{1}$, dont la valeur ſeroit auſſi $=-1$; ce ſeroit une exception fort foible, puisque par la méme raiſon on prouveroit que $-a=+a$: car poſant $a=a^{\frac{2}{2}}=\sqrt{a^2}$, on en tireroit auſſi bien $a=-a$ que $a=+a$. Pour prévenir ces ſortes de conſéquences fauſſes on n'a qu'à remarquer, qu'une telle expreſſion $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative & l'autre negative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ eſt réduite à ſes plus petits termes, & que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainſi comme la valeur de ces puiſſances, a^1, a^2 a^3, a^4, &c. n'eſt pas ambiguë, auſſi celle-cy a^o ne ſauroit etre ambigue. Il eſt donc toujours $a^o=+1$, ce qui ſuffit pour détruire la ſeconde objection; & la troiſieme n'a aucune force, qu'entant que la ſeconde ſubſiſte.

Il paroit donc que le ſentiment de M. Leibniz eſt mieux fondé, puisqu'il n'eſt pas contraire à la découverte de M. Bernoulli, qu'il eſt

$l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$; puisque M. Leibniz ſoutient, que le logarithme de -1, & à plus forte raiſon celui de $\sqrt{-1}$, eſt imaginaire. Mais en adoptant le ſentiment de Mr. Leibniz on ſe jette dans les difficultés & contradictions ſusmentionnées. Car ſi $l-1$ étoit imaginaire, ſon double c. à d. le logarithme de $(-1)^2 = +1$ le ſeroit auſſi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on ſuppoſe $l+1 = 0$.

De quelque coté donc qu'on ſe tourne, ſoit qu'on embraſſe le ſentiment de M. Bernoulli, ou celui de M. Leibniz, on rencontre toujours de ſi grands obſtacles à maintenir ſon parti, qu'on ne ſe ſauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant il ſemble, que ſi l'un de ces deux ſentimens eſt faux, l'autre doit néceſſairement être vrai; & qu'il n'y a point de milieu à choiſir. Voilà donc une queſtion extrêmement importante, qui eſt, d'etablir la doctrine des logarithmes, de telle ſorte qu'elle ne ſoit plus aſſujettie à aucune contradiction.

Mais aprés avoir bien peſé les contradictions, qui ſe trouvent de part & d'autre, on ſera porté à croire, qu'une telle conciliation eſt une choſe tout à fait impoſſible; & les ennemis des Mathematiques ne manqueront pas d'en tirer des conſéquences fort facheuſes contre la certitude de cette ſcience. Car quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les ſciences, on conviendra aiſément, qu'il s'en faut beaucoup, que les objections, qu'ils ont apportées contre aucune ſcience, approchent ſeulement, à l'egard de leur ſolidité, des objections que je viens d'expoſer contre la doctrine des logarithmes. Cependant je ferai voir ſi clairement, qu'il n'y reſtera plus le moindre doute, que cette doctrine eſt ſolidement établie, & que toutes les difficultés ſusmentionnées ne tirent leur origine, que d'une ſeule idée peu juſte: de ſorte que dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés & contradictions, quelque fortes qu'elles ayent pu paroitre, s'evanouïront dabord, & alors toute cette doctrine des logarithmes ſe ſoutiendra ſi bien, qu'on ſera en état de réſoudre aiſément toutes les objections, qui ont paru irréſolubles auparavant. Sans ce developement, qui a pourtant

été

été inconnu jusqu'ici aux Mathematiciens, je ne sai pas, de quel oeil on devroit envisager la doctrine des logarithmes : d'un coté on devroit avouër, qu'elle est vraie & aussi solidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyse ; or de l'autre coté on ne sauroit disconvenir, que cette même doctrine seroit assujetie à des contradictions, auxquelles il seroit impossible de répondre. On seroit par conséquent obligé d'avouër, que la Mathematique, & même l'Analyse, renferme des mystéres incomprehensibles à nos esprits. Ensuite si ces mysteres n'ont été tels qu'à cause d'une seule idée, qui n'étoit pas entierement exacte, on en tirera cette conséquence fort importante, qu'il est extremement dangereux de juger des choses, dont on ne se peut former que des idées imparfaites : or il est bien certain, que hormis les Mathematiques le nombre des idées distinctes & complettes est fort petit.

Denoüement
des Difficultés précédentes.

Il faut d'abord avoüer, que si l'idée, que Mrs. Leibniz & Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, & que tous les Mathematiciens ont eu jusqu'ici, étoit parfaitement juste, il seroit absolument impossible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions, que je viens de proposer. Or l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoissance, comment seroit-il possible qu'elle fut défectueuse ? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé, il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. Cela est aussi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance, qui ne lui convient point : c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme ; & pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés & contradictions, dont la doctrine des logarithmes

rithmes sembloit embarassée, ne subsistent qu'entant qu'on suppose, qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour faire disparoitre toutes ces difficultés & contradictions, qu'en vertu méme de la définition donnée il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes; ce que je démontrerai dans le theoreme suivant.

Theoreme.

Il y a toujours une infinité de logarithmes, qui conviennent également à chaque nombre proposé: ou, si y *marque le logarithme du nombre* x, *je dis que* y *renferme une infinité de valeurs differentes.*

DEMONSTRATION.

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puisqu'on sait que les logarithmes de toutes les autres especes sont à ceux-cy dans un rapport constant, ainsi quand le logarithme hyperbolique du nombre x est nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce méme nombre sera $= 0,434294481 9 . y$. Or le fondement des logarithmes hyperboliques est, que si ω signifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1 + \omega$ sera $= \omega$, ou que $l(1+\omega) = \omega$. De là il s'ensuit que $l(1+\omega)^2 = 2\omega$; $l(1+\omega)^3 = 3\omega$, & en général $l(1+\omega)^n = n\omega$. Mais puisque ω est un nombre infiniment petit, il est evident, que le nombre $(1+\omega)^n$ ne sauroit devenir égal à quelque nombre proposé x, à moins que l'exposant n ne soit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand, & qu'on pose $x = (1+\omega)^n$, & le logarithme de x, qui a été nommé $= y$, sera $y = n\omega$.

Donc pour exprimer y par x, la premiere formule donnant $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ & $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant substituée pour ω dans l'autre formule produira $y = n . x^{\frac{1}{n}} - n = lx$. D'où il est clair que la valeur de la formule

formule $n x^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de x, plus le nombre n sera pris grand; & si l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraye valeur du logarithme de x. Or comme il est certain, que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs differentes, $x^{\frac{1}{4}}$ trois, $x^{\frac{1}{2}}$ quatre, & ainsi de suite, il sera également certain, que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs differentes, puisque n est un nombre infini. Par conséquent cette infinité de valeurs differentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira aussi une infinité de valeurs differentes pour $l\,x$, de sorte que le nombre x doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là il s'ensuit que le logarithme de $+1$ n'est pas seulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités, dont chacune est également le logarithme de $+1$. Cependant on comprend aisément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0 seront, des quantités imaginaires; de sorte que dans le calcul on est en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de méme que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne se sert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ soient égalemeut des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de -1, ou de $\sqrt{-1}$, qui sont tous, à ce que je ferai voir dans la suite, imaginaires, il faut considérer le logarithme de 1 dans toute son etenduë; & alors toutes les difficultés & contradictions rapportées cy-dessus disparoitront d'elles memes. Car soient α, β, γ δ, ε, ζ, &c. les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent aussi bien que 0, & on comprendra aisément qu'il peut être $2\,l-1 = l+1$, quoique tous les logarithmes de -1 soient imaginaires: car pour satisfaire à l'equation $2\,l-1 = l+1$, il suffit que le double de tous les logarithmes de -1, se trouvent parmi les logarithmes imaginaires de $+1$. De méme, puisque $4\,l\sqrt{-1} = l+1$,

 cha-

chaque logarithme de $\sqrt{-1}$ multiplié par 4 se doit rencontrer dans la serie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, &c. Ainsi les égalités $2l-1 = l+1$ & $4l\sqrt{-1} = l+1$, se peuvent maintenir, sans qu'on soit obligé de soutenir qu'il soit ou $l-1=0$ ou $l\sqrt{-1}=0$, comme M. Bernoulli a prétendu. Mais tout cela sera mis dans tout son jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre proposé, ce qui sera le sujet des problemes suivans.

Probleme I.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre affirmatif proposé $+a$ quelconque.

SOLUTION.

Puisque a est un nombre positif, il aura certainement un logarithme réel, qui se trouve par les régles assés connuës. Soit donc A ce logarithme réel du nombre a, & puisque $a = 1.a$, il sera $la = l1 + A$: ou bien chaque logarithme de l'unité étant ajouté à A donnera un logarithme du nombre proposé a; & pour trouver tous ses logarithmes, on n'a qu'à chercher tous les logarithmes de l'unité $+1$. Prenant donc y pour marquer un logarithme quelconque de $+1$, les valeurs de y doivent être tirées de l'équation du Theoreme en y mettant $x=1$, & on aura cette équation $y = n\,1^{\frac{1}{n}} - n$, qui se change en $1+\frac{y}{n} = 1^{\frac{1}{n}}$, & la délivrant des exposans rompus, on aura $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = 1$, où n marque un nombre infini. Cette équation étant maintenant pour ainsi dire rationelle, chacune de ses racines donnera une valeur convenable pour y, c'est à dire un logarithme de $+1$. Or pour trouver toutes les racines de cette équation, on sait qu'il les faut tirer des facteurs de la formule $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - 1$, en supposant cha-

que

que facteur $= 0$. Mais en général il est demontré, que d'une telle formule $p^n - q^n$ un facteur quelconque est $p^2 - 2pq \cos. \frac{2\lambda\pi}{n} + q^2$, où λ marque un nombre entier quelconque & π l'angle de $180°$, ou la moitié de la circonference d'un cercle dont le rayon $= 1$; de sorte que donnant à λ successivement toutes les valeurs possibles, qui sont 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, &c. on obtienne enfin tous les facteurs de la formule $p^n - q^n$. Et partant toutes les racines de l'équation $p^n - q^n = 0$ seront comprises dans cette expression générale $p = q\left(\cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\ \sin. \frac{2\lambda\pi}{n}\right)$, qui se trouve en posant $p^2 - 2pq \cos \frac{2\lambda\pi}{n} + qq = 0$. Donc toutes les racines de notre équation trouvée.

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$$

posant $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = 1$ seront contenuës dans cette expression générale

$$1 + \frac{y}{n} = \cos \frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\ \sin \frac{2\lambda\pi}{n}.$$

Or puisque n marque un nombre infini, l'arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ sera infiniment petit; il sera donc

$$\cos \frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \qquad \& \quad \sin \frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$$

d'où il s'ensuit $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, & partant

$$y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}.$$

On n'a qu'a substituer maintenant pour λ successivement toutes les valeurs

leurs déterminées qu'elle renferme, ſavoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. à l'infini; & tous les logarithmes de l'unité, ou toutes les valeurs poſſibles de $l\,1$ ſeront:

$$0;\ \pm 2\pi\sqrt{-1};\ \pm 4\pi\sqrt{-1};\ \pm 6\pi\sqrt{-1};\ \pm 8\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Donc tous les logarithmes du nombre propoſé a, dont on ſait déjà le logarithme réel A, ſeront:

$$A;\ A\pm 2\pi\sqrt{-1};\ A\pm 4\pi\sqrt{-1};\ A\pm 6\pi\sqrt{-1};\ A\pm 8\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

C. Q. F. T.

De là il eſt clair, que chaque nombre poſitif n'a qu'un ſeul logarithme réél, & que tous ſes autres logarithmes infinis ſont imaginaires. Cependant tous ces logarithmes imaginaires joüiſſent de la meme propriété que le réel, & on s'en pourroit ſervir également dans le calcul en obſervant les memes régles. Car ſoient A, B, C, D &c. les logarithmes réels des nombres poſitifs $a, b, c, d,$ &c. de ſorte qu'il ſoit en général.

$$la = A\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1};\ lb = B\pm 2\mu\pi\sqrt{-1};\ lc = C\pm 2\nu\pi\sqrt{-1}\ \&c.$$

Maintenant ſoit $c = ab$, & on ſait qu'il ſera $C = A + B$: or prenant les logarithmes en général on verra auſſi, que la ſomme des logarithmes des facteurs a, b eſt toujours égale au logarithme du produit $ab = c$. Car on aura

$$la + lb = A + B \pm 2\zeta\pi\sqrt{-1}$$

mettant pour ζ un nombre quelconque entier, qui peut réſulter en ajoutant les termes $\pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ & $\pm 2\mu\pi\sqrt{-1}$. Or il eſt clair que mettant $A + B = C$ cette expreſſion de $la + lb$ convient parfaitement avec celle-cy $lc = C \pm 2\nu\pi\sqrt{-1}$. Le même accord ſe trouvera auſſi dans la diviſion, l'élevation aux puiſſances, & l'extraction des racines, où l'on fait uſage des logarithmes. Mais pour ce qui regarde l'extraction des racines, comme le nombre des racines eſt toujours égal à l'expoſant du ſigne radical, cette maniere d'exprimer les logarithmes généralement a cet avantage ſur la maniere ordi-

ordinaire, qu'elle nous découvre toutes les racines; au lieu que par la methode ordinaire on ne trouve dans chaque cas, qu'une racine, ſavoir la réelle & qui eſt en même tems poſitive : ce qu'on reconnoitra plus évidemment, lorsque j'aurai déterminé tous les logarithmes des nombres tant negatifs qu'imaginaires.

Probleme II.

Déterminer tous les logarithmes, qui répondent à un nombre negatif quelconque $-a$.

SOLUTION.

Puisque $-a = -1.a$, il ſera $l-a = la + l-1$, & prenant pour la le logarithme réel de a, on aura tous les logarithmes du nombre negatif $-a$, ſi l'on cherche tous les logarithmes de -1. Mais ayant vu, que mettant y pour le logarithme du nombre x en général, il eſt $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, d'où l'on tire, $1 + \frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$ & partant $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$. Donc y exprimera tous les logarithmes de -1 ſi l'on met $x = -1$, de ſorte que tous les logarithmes de -1 ſeront les racines de cette équation

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0,$$ poſant le nombre n infiniment grand.

Or on ſait que de cette équation générale $p^n + q^n = 0$ toutes les racines ſe trouvent de la réſolution de cette formule $p^2 - 2pq \operatorname{cof} \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} + q^2 = 0$, prenant pour λ ſucceſſivement tous les nombres entiers tant affirmatifs que negatifs : & partant on aura $p = q \left(\operatorname{cof} \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\ \operatorname{fin.} \frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}\right)$. Donc les racines de cette équation propoſée :

$(1 +$

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0,$$

seront toutes comprises dans cette formule générale :

$$1+\frac{y}{n} = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\ \sin.\frac{(2\lambda-1)\pi}{n},$$

laquelle à cause de $n = \infty$. se change en

$$y = \pm (2\lambda-1)\pi \sqrt{-1}.$$

Par conséquent mettant pour λ successivement toutes les valeurs, qui lui conviennent, tous les logarithmes de -1 seront:

$$\pm\pi\sqrt{-1};\ \pm 3\pi\sqrt{-1};\ \pm 5\pi\sqrt{-1};\ \pm 7\pi\sqrt{-1};\ \pm 9\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Donc si nous posons $l+a = A$, ou que A marque le logarithme réel du nombre positif $+a$, tous les logarithmes du nombre negatif $-a$ seront :

$$A\pm\pi\sqrt{-1};\ A\pm 3\pi\sqrt{-1};\ A\pm 5\pi\sqrt{-1};\ A\pm 7\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

dont le nombre est infini. C. Q. F. T.

De là il est clair, que tous les logarithmes d'un nombre negatif quelconque, sont imaginaires, & qu'il n'y a aucun nombre negatif, dont un de ses logarithmes soit réel. Mr. Leibniz a eu donc raison de soutenir, que les logarithmes des nombres negatifs étoient imaginaires. Cependant puisque les nombres affirmatifs ont aussi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce sentiment perdent leur force. Car quoiqu'il soit $l-1 = \pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$ le logarithme de son quarré sera $l(-1)^2 = \pm 2(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$ expression qui se trouve parmi les logarithmes de $+1$, de sorte qu'il demeure vrai que $2\,l-1 = l+1$, quoique nul des logarithmes de -1 se trouve parmi les logarithmes de $+1$. Soit A le logarithme réel du nombre positif $+a$, & que p marque en général tous les nombres pairs, & q tous les nombres impairs entiers : & ayant en général :

$$l+1 = \pm p\pi\sqrt{-1} \quad \& \quad l-1 = \pm q\pi\sqrt{-1}.$$

&

$\& \quad l+a = A \pm p\pi \sqrt{-1} \quad \& \quad l-a = A \pm q\pi \sqrt{-1}.$
d'où l'on voit que $l(-a)^2 = 2l-a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1}$. Or $2q$ étant $= p$, & $2A$ le logarithme réel de a^2, on voit que $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ eſt la formule générale des logarithmes de a^2; ainſi il eſt $l(-a)^2 = la^2$ ou bien $2l-a = 2l+a$, ſans qu'il ſoit $l-a = l+a$: ce qui ſeroit ſans doute contradictoire, ſi les nombres $+a$ & $-a$ n'avoient qu'un ſeul logarithme; car alors on auroit raiſon de conclure, qu'il fut $l-a = l+a$ s'il etoit $2l-a = 2l+a$. Mais dès qu'on tombe d'accord, que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conſéquence, toute néceſſaire qu'elle fut auparavant, n'eſt plus juſte; puisque pour qu'il ſoit $2l-a = 2l+a$, il ſuffit, que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ ſe rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, ſans qu'aucun des logarithmes de $-a$ ſoit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouër que toutes les valeurs de $2l-a$ ſont differentes des valeurs de $2l+a$, vu qu'il eſt:

$$2l+a = 2A \pm 2p\pi\sqrt{-1} \quad \& \quad 2l-a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1},$$

où $2p$ marque un nombre pairement pair, & $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel eſt $= 2A$, ſont compris dans cette formule générale $la^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, où p marque un nombre pair quelconque ſans en excepter zero. Cela remarqué il eſt clair, que toutes les valeurs de $2l-a$ ſont compriſes dans celles de la^2, auſſi bien que celles de $2l+a$. Ainſi quoiqu'on puiſſe dire que $2l-a = la^2$ & $2l+a = la^2$, prenant le ſigne de $=$ pour marquer, que les valeurs de $2l-a$ ou de $2l+a$ ſe rencontrent parmi les valeurs de la^2; on ne ſauroit dire à la verité qu'il ſoit $2l-a = 2l+a$. Néantmoins comme dans les formules $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ & $l-a = A \pm q\sqrt{-1}$ les nombres p & q ſont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour p & q les mémes nombres. Ainſi pour faire ces multi-

 plica-

plications dans toute leur étenduë, que p, p', p'', p''' &c. marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux, & q, q', q'', q''', &c. des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux; ces duplications se feront de la maniere suivante:

$$\begin{array}{r|r} l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1} & l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1} \\ \underline{l+a = A \pm p'\pi\sqrt{-1}} & \underline{l-a = A \pm q'\pi\sqrt{-1}} \\ 2l+a = 2A \pm (p+p')\pi\sqrt{-1} & 2l-a = 2A \pm (q+q')\pi\sqrt{-1} \end{array}$$

Ici maintenant $p+p'$ marquant la somme de deux nombres pairs quelconques, & $q+q'$ la somme de deux nombres impairs quelconques, tant $p+p'$ que $q+q'$ marquera un nombre pair quelconque; & partant il sera $p+p' = q+q'$, donc $2l-a = 2l+a$. Par conséquent dans ce sens on pourra soutenir qu'il est $2l-a = 2l+a$, sans qu'il soit $l-a = l+a$. De même maniere il sera

$$3l+a = 3A \pm (p+p'+p'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^3$$
$$3l-a = 3A \pm (q+q'+q'')\pi\sqrt{-1} = 3A \pm q\pi\sqrt{-1} = l-a^3$$

car $p+p'+p''$ produit tous les nombres pairs, & convient par conséquent avec p; pareillement $q+q'+q''$ produit tous les nombres impairs & convient avec q. Or puisque $q+q'+q''+q'''$ produit tous les nombres pairs, cette expression sera équivalente avec p: donc les quadruples seront:

$$4l+a = 4A \pm (p+p'+p''+p''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4$$
$$4l-a = 4A \pm (q+q'+q''+q''')\pi\sqrt{-1} = 4A \pm p\pi\sqrt{-1} = l+a^4$$

Ainsi cette maniere de trouver les logarithmes des puissances tant de $+a$ que de $-a$ s'accorde parfaitement bien avec les principes connus tant des puissances que des logarithmes, & toutes les objections rapportées cy-dessus n'ont plus aucune prise sur ces vérités demontrées. Le même accord s'observera aussi dans les logarithmes des quantités imaginaires, que je m'en vai déveloper dans le probleme suivant.

Proble-

Probleme III.

Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.

SOLUTION.

Il est démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, se réduit toujours à cette forme $a + b\sqrt{-1}$, où a & b sont des quantités réelles. Je pose maintenant $\sqrt{(aa+bb)} = c$, & $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ seront le cosinus & le sinus d'un certain angle, qu'il sera aisé de trouver par les tables. Soit donc cet angle $= \phi$, qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle, qui est sa mesure, le sinus total étant posé $= 1$. On aura donc $a = c \cos\phi$ & $b = c \sin\phi$; & la formule imaginaire, dont il faut chercher tous les logarithmes, sera

$$a + b\sqrt{-1} = c(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)$$

ou, puisque c est un nombre affirmatif, soit C son logarithme réel, & on aura:

$$l(a + b\sqrt{-1}) = C + l(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi)$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi$, laquelle étant mise pour x, ses logarithmes seront les valeurs de y tirées de cette équation $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0$, n marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $p^n - q^n = 0$, je remarque que $x = \cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi = \left(1 + \frac{\phi\sqrt{-1}}{n}\right)^n$, dont la vérité est suffisamment prouvée ailleurs. Car on sait que

$$\cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{1.2.} + \frac{\phi^4}{1.2.3.4.} - \frac{\phi^6}{1.2.3.4.5.6.} + \&c.$$

$$\& \sin\phi = \phi - \frac{\phi^3}{1.2.3.} + \frac{\phi^5}{1.2.3.4.5.} - \&c.$$

Or puisque n eſt un nombre infini, il ſera:

$$\left(1+\frac{\phi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 + \frac{\phi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\phi^2}{1.2} - \frac{\phi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\phi^4}{1.2.3.4} + \frac{\phi^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \&c.$$

d'où il eſt clair que $\left(1+\frac{\phi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = \cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi$. Nous aurons donc $p = 1 + \frac{y}{n}$ & $q = \frac{1+\phi\sqrt{-1}}{n}$, pour l'équation à reſoudre $p^n - q^n = 0$. Mais ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation eſt contenuë dans cette formule générale $p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$, prenant pour λ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou negatifs, il ſera pour notre cas:

$$1+\frac{y}{n} = \left(1+\frac{\phi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

& parce que à cauſe du nombre n infini il eſt $\cos\frac{2\lambda\pi}{n} = 1$ & $\sin\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$, il ſera $1 + \frac{y}{n} = \left(1+\frac{\phi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$; ce qui donne $y = \phi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$: d'où tous les logarithmes de la formule $\cos\phi + \sin\phi.\sqrt{-1}$ ſeront:

$\phi\sqrt{-1}$; $(\phi \pm 2\pi)\sqrt{-1}$; $(\phi \pm 4\pi)\sqrt{-1}$; $(\phi \pm 6\pi)\sqrt{-1}$; &c.

& les logarithmes de la formule imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, poſant $c = \sqrt{(aa+bb)}$, & $\tang\phi = \frac{b}{a}$, ou $\cos\phi = \frac{a}{c}$ & $\sin\phi = \frac{b}{c}$, & de plus $lc = C$, ſeront:

$C + \phi\sqrt{-1}$; $C + (\phi \pm 2\pi)\sqrt{-1}$; $C + (\phi \pm 4\pi)\sqrt{-1}$; $C + (\phi \pm 6\pi)\sqrt{-1}$; &c.

C. Q. F. T.

Delà

De là il eſt clair, que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire ſont auſſi imaginaires; car, lorsque ou $\varphi = 0$, ou $\varphi = \pm 2\lambda\pi$, qui ſont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver, que lorsque tang $\varphi = \frac{b}{a} = 0$; il feroit donc $b = 0$, & la quantité $a + b\sqrt{1}$ ceſſeroit d'être imaginaire. Donc, ſi l'on prend p pour ſignifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou negatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ feront renfermés dans cette formule générale $C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1}$, où C eſt le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{(aa + bb)} = c$, & l'arc ou l'angle φ eſt pris tel, qu'il eſt ſin $\varphi = \frac{b}{c}$ & coſ $\varphi = \frac{a}{c}$. Or puisqu'il y a une infinité d'angles, qui conviennent au meme ſinus $\frac{b}{c}$ & coſinus $\frac{a}{c}$, qui ſont tous compris dans la formule $\varphi + p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, & dire que le logarithme de $a + b\sqrt{-1}$ eſt en général $= C + \varphi\sqrt{-1}$; puisque cet angle φ renferme déja tous ces angles. Cependant ſi l'on prend pour φ le plus petit angle affirmatif, qui répond au ſinus $\frac{b}{c}$ & au coſinus $\frac{a}{c}$; la formule générale des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ ſera $= C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle φ eſt tel, qu'il tient une raiſon commenſurable avec π ou la circonference du cercle, ce ſera toujours une marque, qu'une certaine puiſſance de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ devient réelle. Car ſoit $\varphi = \frac{\mu}{\nu}\pi$, & puisqu'il eſt $l(a + b\sqrt{-1}) = C + \left(\frac{\mu}{\nu}\pi + p\pi\right)\sqrt{-1}$: il ſera

$$l(a + b\sqrt{-1})^{\nu} = \nu C + (\mu + \nu p)\pi\sqrt{-1}.$$

d'où l'on voit que ſi $\mu + \nu p$ eſt un nombre pair, ou ſeulement μ pair, la puiſ-

ſance

sance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ sera un nombre réel affirmatif, & même $= c^{\nu} = \left(\sqrt{(aa+bb)}\right)^{\nu}$: or si $\mu+\nu p$, ou seulement μ est un nombre impair, la puissance $(a+b\sqrt{-1})^{\nu}$ sera un nombre negatif $= -c^{\nu}$.

Jusqu'ici on auroit pu croire, qu'il seroit indifferent de donner à π quelque valeur que ce soit, puisqu'il ne paroissoit rien; ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l+a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres negatifs $l-a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puissions comprendre, pourquoi la lettre π dût plutôt marquer la demi-circonference d'un cercle décrit du rayon $=1$, que tout autre nombre. Mais à présent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raison en devient évidente; puisqu'il faut comparer l'angle ϕ à π, de sorte que si l'on donnoit à π toute autre valeur que celle de deux angles droits, les formules deviendroient fausses, & ne seroient plus d'accord avec celles, que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs & negatifs.

Pour faire voir cela plus clairement, supposons $c=1$ & $C=0$, pour avoir cette formule $\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi$, dont tous les logarithmes seront renfermés dans cette formule générale

$$l(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi) = (\phi + p\pi)\sqrt{-1}$$

p marquant un nombre entier pair quelconque, soit affirmatif, soit negatif, ou même zero.

De là nous tirerons premiérement d'abord les formules supérieures pour les logarithmes des nombres réels affirmatifs ou negatifs. Car soit $\phi=0$, & à cause de $\cos\phi=1$ & $\sin\phi=0$, il sera $l+1 = p\pi\sqrt{-1}$, ou bien en détaillant

$l+1 = 0;\ \pm 2\pi\sqrt{-1};\ \pm 4\pi\sqrt{-1};\ \pm 6\pi\sqrt{-1};\ \pm 8\pi\sqrt{-1};$ &c.

or mettant $\phi = \pi = 180°$, à cause de $\cos\phi = -1$ & $\sin\phi = 0$, il sera $l-1 = (1+p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1}$, prenant q pour marquer un nombre impair quelconque. On aura donc:

$l-1 = \pm\pi\sqrt{-1};\ \pm 3\pi\sqrt{-1};\ \pm 5\pi\sqrt{-1};\ \pm 7\pi\sqrt{-1};$ &c.

Deve-

Dévelopons maintenant aussi les cas les plus simples des nombres imaginaires, & soit:

1. $\Phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, & à cause de cos$\,\Phi = 0$ & sin$\,\Phi = +1$, il sera $l + \sqrt{-1} = (\frac{1}{2} + p)\pi\sqrt{-1}$; donc tous les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ seront:

$$\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1};\ \tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1};\ \tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1};\ \tfrac{13}{2}\pi\sqrt{-1};\ \tfrac{17}{2}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{15}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{19}{2}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Ajoutant ici deux valeurs quelconques ensemble pour avoir le logarithme de $l(+\sqrt{-1})^2$, c'est à dire de $l-1$, on trouvera ou $\pm\pi\sqrt{-1}$, ou $\pm 3\pi\sqrt{-1}$; ou $\pm 5\pi\sqrt{-1}$; &c. qui sont tous des logarithmes de -1.

2. Soit $\Phi = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$, & à cause de cos$\,\Phi = 0$ & sin$\,\Phi = -1$ il sera $l - \sqrt{-1} = (-\frac{1}{2} + p)\pi\sqrt{-1}$; donc tous les logarithmes de $-\sqrt{-1}$ seront contenus dans les expressions suivantes:

$$+\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{15}{2}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{19}{2}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{13}{2}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{17}{2}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

où il est clair comme auparavant, que deux valeurs quelconques étant ajoutées ensemble donnent $q\pi\sqrt{-1}$, posant q pour un nombre impair quelconque; ce qui est le logarithme -1 ou de $(-\sqrt{-1})^2$. De plus si l'on ajoute un logarithme quelconque de $-\sqrt{-1}$ à un logarithme quelconque de $+\sqrt{-1}$, pour avoir un logarithme du produit $(+\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1})$, qui est $= +1$, on ne trouvera en effet que des logarithmes de $+1$. Et il est clair de même qu'il sera:

$$l(+\sqrt{-1}) - l(-\sqrt{-1}) = l-1 \text{ ou } l(-\sqrt{-1}) - l(+\sqrt{-1}) = l-1$$

tout comme la nature de ces expressions exige.

3. Soit $\Phi = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$ ou cos$\,\Phi = \frac{1}{2}$ & sin$\,\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; on trouvera $l\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = (\frac{1}{3} + p)\pi\sqrt{-1}$, de sorte que tous les lo-

 garithmes

garithmes de cette expression imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$ feront:

$$+\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1};\ \tfrac{25}{3}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{5}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{11}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{17}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{23}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{29}{3}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

où il est clair, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutées ensemble produisent $q\,\pi\,\sqrt{-1}$, ou quelcun des logarithmes de -1, puisque $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$.

4. Soit $\Phi = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ ou $\cos\Phi = -\frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; & l'on trouvera $l\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = (\frac{2}{3}+p)\,\pi\sqrt{-1}$. Ainsi tous les logarithmes de la formule imaginaire $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ feront:

$$+\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{26}{3}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{22}{3}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{28}{3}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

& puisque $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$, on verra qu'on obtient effectivement les logarithmes de $+1$ en ajoutant ensemble trois quelconques de ces logarithmes.

5. Soit $\Phi = 240^\circ = \frac{4}{3}\pi$, ou $\cos\Phi = -\frac{1}{2}$ & $\sin\Phi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, & l'on aura $l\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = (\frac{4}{3}+p)\,\pi\sqrt{-1}$, de sorte que tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ feront:

$+\frac{4}{3}\pi$

$+\frac{4}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{10}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{16}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{22}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{28}{3}\pi\sqrt{-1};$ &c.

$-\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{8}{3}\sqrt{\pi-1}; -\frac{14}{3}\pi\sqrt{-1}: -\frac{20}{3}\pi\sqrt{-1}: -\frac{26}{3}\pi\sqrt{-1};$ &c.

d'où l'on tirera comme auparavant, en ajoutant trois quelconques de ces logarithmes ensemble, quelcun des logarithmes de $+1$, puisqu'il est $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = +1$. De même deux de ces logarithmes quelconques ajoutés ensemble produiront un logarithme de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; car il est $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Et puisqu'il est réciproquement $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, on verra aussi, que la somme de deux logarithmes quelconques de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ produit un logarithme de $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

6. Soit $\phi = 300° = \frac{5}{3}\pi$ ou $\cos\phi = \frac{1}{2}$ & $\sin = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; & l'on aura $l\frac{1-\sqrt{-3}}{2} = (\frac{5}{3}+p)\pi\sqrt{-1}$. Par conséquent les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-3}}{2}$ seront

$+\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{23}{3}\pi\sqrt{-1}; +\frac{29}{3}\pi\sqrt{-1};$ &c.

$-\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{7}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{13}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{19}{3}\pi\sqrt{-1}; -\frac{25}{3}\pi\sqrt{-1};$ &c.

Où il est évident, que trois quelconques de ces logarithmes étant ajoutés ensemble donnent un logarithme de -1, conformément à ce qu'il est $\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = -1$. Et en général on verra toujours, que toutes les operations, qu'on fera avec ces logarithmes, font parfaitement d'accord avec les opérations rélatives faites avec les nombres, qui leur conviennent; de forte qu'on ne rencontrera plus le moindre inconvenient à l'egard des opérations en logarithmes, & de celles qui leur répondent en nombres.

7. Soit $\phi = 45° = \frac{1}{4}\pi$ ou $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $l\,\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Ainfi tous les logarithmes de cette expreffion imaginaire $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront.

$$+\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{9}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{17}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{25}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{33}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{7}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{15}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{23}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{31}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{39}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

8. Soit $\phi = 135° = \frac{3}{4}\pi$; ou $\cos\phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\phi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$; & l'on aura $l\,\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{3}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Et partant tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront:

$$+\tfrac{3}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{11}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{19}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{27}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{35}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{5}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{13}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{21}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{29}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{37}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Chacun de ces logarithmes étant ajouté à quelcun des précedens de $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ produit un logarithme de la forme $q\pi\sqrt{-1}$ ou de -1, tout comme il faut, puisque $\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -1$

9. Soit $\phi = 225° = \frac{5}{4}\pi$ ou $\cos\phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ & $\sin\phi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; & l'on

aura

aura $l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{5}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Donc tous les logarithmes de cette formule $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront:

$$+\tfrac{5}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{13}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{21}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{29}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{3}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{11}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{19}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{27}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

qui font les negatifs des précedens ; ce qui eſt auſſi parfaitement bien d'accord avec les opérations analytiques, puisqu'il eſt $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = 1 : \left(\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$ & partant $l\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = -l\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

10. Soit $\varphi = 315^\circ = \frac{7}{4}\pi$, ou cof $\varphi = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ & fin $\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où l'on aura $l\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = (\frac{7}{4}+p)\pi\sqrt{-1}$. Par conféquent tous les logarithmes de cette formule $\frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ feront:

$$+\tfrac{7}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{15}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{23}{4}\pi\sqrt{-1};\ +\tfrac{31}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$
$$-\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{9}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{17}{4}\pi\sqrt{-1};\ -\tfrac{25}{4}\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

Tous ces logarithmes des quatre derniers articles ont cette propriété que chacun multiplié par 4 produit un logarithme de -1, ce qui eſt conforme à la verité; puisque les quarré-quarrés de ces quatre formules :

$$\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};\quad \frac{+1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

produiſent le nombre -1.

Ces exemples ſuffiſent pour faire voir, que l'idée des logarithmes que je viens d'établir eſt la véritable, & qu'elle eſt parfaitement d'accord

cord avec toutes les opérations, que la théorie des logarithmes renferme : de forte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté ; & que toutes les contradictions, auxquelles cette doctrine paroiffoit affujettie, disparoiffent entiérement. Par conféquent la grande controverfe, qui partagea autrefois Mrs. Leibniz & Bernoulli, eft à prefent parfaitement décidée, enforte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre fujet de refufer fon confentement.

La belle découverte de Mr. Bernoulli, de ramener la quadrature du cercle aux logarithmes imaginaires, fe trouve auffi non feulement parfaitement d'accord avec cette théorie, mais elle en eft une fuite néceffaire, & eft portée même par là à une infiniment plus grande étendue : puisque nous voyons, que les logarithmes de tous les nombres, entant qu'ils font imaginaires, dépendent tous de la quadrature du cercle. Ainfi les logarithmes de $+1$ étant $\pm p\pi\sqrt{-1}$, il fera $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ toujours une quantité réelle, mais qui renferme une infinité de valeurs, à caufe de l'infinité des logarithmes de $+1$. Conféquemment à cela, fi l'on pofe le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, toutes les valeurs de cette expreffion $\frac{l+1}{\sqrt{-1}}$ feront les fuivantes:

$$0;\ \pm 2\pi;\ \pm 4\pi;\ \pm 6\pi;\ \pm 8\pi;\ \pm 10\pi;\ \&c.$$

De même les logarithmes de -1 étant divifés par $\sqrt{-1}$ fourniront les quantités réelles fuivantes, qui renferment également la quadrature du cercle. Car les valeurs de

$$\frac{l-1}{\sqrt{-1}} \text{ font } \pm\pi;\ \pm 3\pi;\ \pm 5\pi;\ \pm 7\pi;\ \pm 9\pi;\ \&c.$$

De la même maniere on verra, que les valeurs des expreffions fuivantes feront :

Les

Les valeurs de	seront celles-cy à l'infini
$\dfrac{l(+\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{1}{2}\pi;\ +\frac{5}{2}\pi;\ +\frac{9}{2}\pi;\ +\frac{13}{2}\pi;\ +\frac{17}{2}\pi;$ &c. $-\frac{3}{2}\pi;\ -\frac{7}{2}\pi;\ -\frac{11}{2}\pi;\ -\frac{15}{2}\pi;\ -\frac{19}{2}\pi;$ &c.
$\dfrac{l(-\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$	$+\frac{3}{2}\pi;\ +\frac{7}{2}\pi;\ +\frac{11}{2}\pi;\ +\frac{15}{2}\pi;\ +\frac{19}{2}\pi;$ &c. $-\frac{1}{2}\pi;\ -\frac{5}{2}\pi;\ -\frac{9}{2}\pi;\ -\frac{13}{2}\pi;\ -\frac{17}{2}\pi;$ &c.

& on tirera également des autres exemples developés cy-dessus de semblables expressions réelles, qui renfermeront toutes la quadrature du cercle.

J'ai déjà fait sentir le bel accord de ces logarithmes avec l'extraction des racines, ayant fait voir que les doubles tant des logarithmes de -1, que de $+1$, sont contenus parmi les logarithmes de $+1$, puisqu'il est $1 = (+1)^2 = (-1)^2$: de même puisque il est

$$1 = (+1)^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

on verra, que les triples des logarithmes de $+1$, de $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & de $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ se trouvent parmi les logarithmes de $+1$. Mais je remarque ici de plus, comme 1 n'a que ces deux racines quarrées $+1$ & -1, ainsi si l'on range les doubles de tous les logarithmes tant de $+1$, que de -1 dans une suite, on obtiendra la serie complette de tous les logarithmes de $+1$; car:

$2l+1$ est $0;\ \pm 4\pi\sqrt{-1};\ \pm 8\pi\sqrt{-1};\ \pm 12\pi\sqrt{-1};$ &c.

$2l-1$ est $\pm 2\pi\sqrt{-1};\ \pm 6\pi\sqrt{-1};\ \pm 10\pi\sqrt{-1};$ &c.

De la même maniere les trois racines cubiques de $+1$ étant $+1$; $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, si l'on range les triples de tous les loga-

logarithmes de ces trois racines dans une ſuite, il en réſultera la ſuite complette des logarithmes de $+1$, car:

$3l+1$ donne $0; \pm 6\pi\sqrt{-1}; \pm 12\pi\sqrt{-1}; \pm 18\pi\sqrt{-1}$ &c.

$3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ldots$ $+2\pi\sqrt{-1}; +8\pi\sqrt{-1}; +14\pi\sqrt{-1};$ &c.
$-4\pi\sqrt{-1}; -10\pi\sqrt{-1}; -16\pi\sqrt{-1};$ &c.

$3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\ldots$ $+4\pi\sqrt{-1}; +10\pi\sqrt{-1}; +16\pi\sqrt{-1};$ &c.
$-2\pi\sqrt{-1}; -8\pi\sqrt{-1}; -14\pi\sqrt{-1};$ &c.

Dans ces trois ſeries chaque logarithme de $+1$ ſe trouve, & aucun ne s'y rencontre qu'une ſeule fois; ce qui eſt une marque, que l'unité n'a que ces trois racines cubiques, & qu'il faut les trois enſemble pour épuiſer la nature de l'unité.

Il en eſt de même de toutes les autres racines de l'unité, & comme les racines quarré-quarrées de $+1$ ſont:

$$+1, \quad -1; \quad +\sqrt{-1}; \quad \& -\sqrt{-1}$$

on verra que les quadruples des logarithmes de chacune de ces racines ne donnent que la quatriéme partie des logarithmes de $+1$. Or tous ces quadruples de toutes les quatre racines enſemble, produiſent toute la ſuite des logarithmes de $+1$. Il eſt auſſi remarquable que tous les logarithmes d'une racine quelconque ſont differens des logarithmes de toute autre racine du même nom. Cependant quoique ces deux logarithmes $l+1$ & $l-1$ ſoient differens entr'eux, il eſt néanmoins $2l+1 = l+1$ & $2l-1 = l+1$, ſans qu'il ſoit $2l+1 = 2l-1$. De la même maniere ces trois logarithmes $l+1$; $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ſont differens entr'eux; cependant nonobſtant cette inégalité il eſt

$$3l+1 = l+1; \; 3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = l+1; \; \& \; 3l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = l+1.$$

Nous

Nous voyons donc qu'il eſt eſſentiel à la nature des logarithmes, que chaque nombre ait une infinité de logarithmes, & que tous ces logarithmes ſoient differens non ſeulement entr'eux, mais auſſi de tous les logarithmes de tout autre nombre. Il en eſt de même des logarithmes, que des angles, ou des arcs de cercle; car, comme à chaque ſinus & coſinus répond une infinité d'arcs differens, ainſi à chaque nombre convient une infinité de logarithmes differens. Mais il faut ici remarquer une grande difference, qui eſt, que tous les arcs, qui répondent au même ſinus & coſinus ſont réels, au lieu que tous les logarithmes du même nombre ſont imaginaires à la reſerve d'un ſeul, lorſque le nombre donné eſt poſitif; car tous les logarithmes des nombres, tant negatifs qu'imaginaires, ſont ſans aucune exception imaginaires. Or comme à un arc donné ne convient qu'un ſeul ſinus & coſinus, ainſi à un logarithme propoſé ne répond qu'un ſeul nombre; de ſorte que c'eſt un probleme, qui n'admet qu'une ſeule ſolution, lorſqu'on demande le nombre, qui convient à un logarithme propoſé.

Probleme IV.

Un logarithme quelconque étant propoſé, trouver le nombre qui lui répond.

SOLUTION.

Poſons premiérement que le logarithme propoſé ſoit une quantité réelle $= f$, & on ſait que poſant le nombre $= e$, dont le logarithme réel $= 1$, le nombre qui répond au logarithme f ſera $= e^f$.

En ſecond lieu, ſoit le logarithme propoſé $= g\sqrt{-1}$ ou ſimplement imaginaire, & ſoit x le nombre qui lui répond. Puiſque g eſt un nombre réel, qu'on le compare avec π, & qu'il ſoit $g = m\pi$, & il eſt clair, ſi m eſt un nombre entier ou pair ou impair, le nombre x ſera ou $+1$ ou -1. Mais pour tout autre cas quelconque le nombre x ſera imaginaire, & pour le trouver on n'a qu'à prendre un arc de cercle

$= g$, le rayon étant $= 1$ & ayant cherché ſon ſinus & coſinus, le nombre cherché ſera $x = \cos g + \sqrt{-1}.\sin g$.

En troiſieme lieu, ſoit le logarithme propoſé une quantité imaginaire quelconque $= f + g\sqrt{-1}$, puisqu'on ſait que toute quantité imaginaire ſe peut réduire à cette forme $f + g\sqrt{-1}$; en ſorte que f & g ſoient des nombres réels. Cela poſé, il eſt clair que le nombre cherché x ſera le produit de deux nombres, dont l'un aura pour logarithme f & l'autre $g\sqrt{-1}$. Par conſéquent le nombre qui répond au logarithme $f + g\sqrt{-1}$ ſera $= e^f (\cos g + \sqrt{-1}.\sin g)$. C.Q.F.T.

On voit donc que le nombre, qui répond au logarithme propoſé $f + g\sqrt{-1}$ ſera réel, lorsque $\sin g = 0$, c'eſt à dire, lorsque $g = m\pi$, le coëfficient m étant un nombre entier quelconque, ou affirmatif ou negatif. Dans ce cas on voit de plus, que ſi m eſt un nombre pair, à cauſe de $\cos g = +1$, le nombre cherché ſera affirmatif, mais ſi m eſt un nombre impair, qu'a cauſe de $\cos g = -1$, le nombre cherché ſera negatif $= -e^f$. Dans tous les autres cas, où m, c'eſt à dire $\frac{g}{\pi}$ ſera un nombre rompu, ou méme irrationel, le nombre qui répond à ce logarithme $f + g\sqrt{-1}$ ſera infailliblement imaginaire.

Par le moyen de cette régle on pourra auſſi ſe ſervir des logarithmes dans le calcul des nombres imaginaires. Pour en donner un exemple, qu'on cherche la valeur de cette expreſſion $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4$ $\left(\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 \sqrt{-1} = A$. Pour cet effet on n'a qu'à prendre un logarithme quelconque de chaque facteur, & en faire les opérations conformément aux régles généralement reçues en ſorte:

$$l\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1}. \text{ Donc } 4\,l\,\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$$

$$l\,\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}\pi\sqrt{-1}; \;\ldots\ldots\; 3\,l\,\frac{+1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \tfrac{3}{4}\pi\sqrt{-1}$$

$$l\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1}; \;\ldots\ldots\; 2\,l\,\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1}$$

& enfin $\qquad l\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$

Donc la fomme ou $\qquad lA = \tfrac{79}{12}\pi\sqrt{-1}$

Par confequent le produit cherché fera

$$A = \cos\tfrac{79}{12}\pi + \sqrt{-1}.\ \sin\tfrac{79}{12}\pi \qquad \text{ou bien}$$

$$A = \cos\tfrac{7}{12}\pi + \sqrt{-1}.\ \sin\tfrac{7}{12}\pi$$

Je remarque encore que le logarithme propofé étant $= f + g\sqrt{-1}$ le nombre répondant felon la régle commune fe trouve $= e^{f+g\sqrt{-1}}$ Or cette expreffion eft tout à fait équivalente à celle que nous venons de trouver, Car on fait d'ailleurs que $e^{g\sqrt{-1}} = \cos g + \sqrt{-1}.\sin g$ & partant $e^{f+g\sqrt{-1}} = e^f.\ e^{g\sqrt{-1}} = e^f\ (\cos g + \sqrt{-1}.\sin g)$: mais cette derniere expreffion eft plus commode que la premiére, ou les imaginaires entrent dans l'expofant.