RÉFLEXIONS
SUR QUELQUES LOIX GÉNÉRALES DE LA NATURE QUI S'OBSERVENT DANS LES EFFETS DES FORCES QUELCONQUES,

PAR M. EULER.

I.

Ayant examiné dans le Mémoire précedent la figure que doit prendre un fil, soit parfaitement flexible, ou doüé de quelque roideur, étant sollicité par des forces quelconques dirigées vers autant de points fixes, qu'on voudra; j'ai recherché les formules, dont la valeur est la plus petite dans cette figure, de sorte que, si l'on connoissoit d'ailleurs ces formules, on pourroit par la methode des plus grands & des plus petits trouver la même figure d'un tel fil, sans avoir égard aux principes directs de la Mecanique, sur lesquels cette recherche est fondée. Comme il y a longtems, que les Philosophes soutiennent avec bien de la raison, que la nature dans toutes ses productions affecte constamment un certain *minimum*, ce que Monsieur *de Maupertuis* a mis tout à fait hors de doute dans quelques Mémoires, qu'il a donnés, tant sur l'état d'equilibre des corps, que sur celui de mouvement; nous nous trouvons en état d'assigner ce *minimum* pour les figures des fils sollicités par des forces quelconques. Mais puisque j'ai été con-

conduit à la connoiſſance de ce *minimum a poſteriori*, il s'agit maintenant de découvrir les raiſonnemens, qui nous puiſſent conduire *à priori* à la même connoiſſance: ou bien il faut rechercher les principes, deſquels on pourroit conclure ce *minimum*, quand même on ne connoitroit pas encore la courbe, que le fil prend actuellement. Ces principes une fois découverts ne manqueront pas de répandre beaucoup de lumiére ſur les loix que la nature obſerve dans un nombre infini de ſes autres productions, pour la détermination deſquelles la Mecanique même n'eſt pas encore portée à un degré ſuffiſant de perfection; & il n'y a aucun doute, que la Metaphyſique ne puiſſe tirer de cette découverte quantité d'éclairciſſemens ſur la maniere d'agir des forces en général.

II. Pour mieux réüsſir dans cette recherche, il faut commencer par la même conſideration, dont Mr. de *Maupertuis* s'eſt ſervi pour établir ſa loi générale du repos: car cette conſidération nous conduira à une idée plus preciſe & plus feconde de ce qu'on doit entendre par *la quantité d'action des forces.* Nous verrons que la choſe nommée par ce terme eſt de la derniere importance dans toutes les actions des forces, ſoit que les corps, qui en ſont ſollicités demeurent en équilibre, ou qu'ils ſoient mis en mouvement, ce que je ferai voir par pluſieurs preuves trés convainquantes. Aprés cela on conviendra aiſement que cette quantité d'action des forces doit entrer dans toutes les formules, dont la valeur eſt la plus petite dans les effets, qui ſont produits par ces forces. C'eſt une régle aſſes généralement reçuë, que la nature dans toutes ces productions n'emploie que la plus petite quantité d'action, qu'il ſoit posſible; mais dans la pluspart des cas il a été jusqu'ici extrémement difficile de bien déterminer cette quantité d'action, pour l'epargne de laquelle la nature eſt ſi ſoigneuſe. Mais dés que nous nous ſerons formé une idée aſſes diſtincte de la quantité d'action des forces, que Mr. *de Maupertuis* a découverte ſi heureſement dans le cas d'équilibre, qu'il a traité, la pluspart des autres difficultés, que la diverſité des cas ſemble renfermer, disparoitront bientot, & on ſera obligé de reconnoitre que cette idée eſt d'un uſage univerſel, tant dans la Mecanique, que dans

toute

toute la Physique. Quand même on ne gouteroit pas les raisonnemens, par lesquels je ferai l'application de cette idée à quantité d'effects produits par des forces quelconques, on sera obligé d'en reconnoitre la solidité par un grand nombre de cas, qu'on est en état de verifier par les principes ordinaires de la Mecanique.

III. C'est la figure, que doit prendre une masse fluide, dont toutes les particules sont sollicitées par des forces quelconques, qui a été le principal objet des recherches de Mr. *de Maupertuis*, pour découvrir la loi générale du repos dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris de l'An. 1740. Je considererai donc de même une masse fluide dont toutes les particules sont attirées vers autant de centres fixes, qu'on voudra, par des forces, qui sont proportionelles à des fonctions quelconques des distances à ces centres, & je rechercherai premierement la figure, que doit prendre cette masse fluide, afin qu'elle soit en repos, ou en équilibre. De là je tacherai ensuite de découvrir ce qui sera dans cette figure un *maximum*, ou un *minimum*, pour être d'autant mieux en état de déterminer ce qu'il faut entendre sous le nom de la *quantité d'action des forces sollicitantes*, dont je ferai sentir aprés, par quelques reflexions, la derniere importance dans toutes les recherches où il s'agit des effets produits par des forces quelconques. D'abord il est évident que, pour qu'une telle masse fluide soit en équilibre, il faut que la moyenne direction des forces, dont chaque particule, qui se trouve à la surface, est sollicitee, soit perpendiculaire à la surface : car si la moyenne direction étoit oblique à la surface, la particule qui en étoit sollicitée, suivroit cette direction oblique selon la tangente, & partant la masse ne seroit point en équilibre. Donc, pour entrer dans cette recherche, je commencerai par déterminer en général la position de la ligne perpendiculaire à une surface quelconque.

PROBLEME I.

IV. *Une surface quelconque étant proposée sur laquelle se trouve le point Z, trouver la position de la ligne ZP, qui est perpendiculaire à cette surface au point Z.* Fig. 1.

SOLU-

SOLUTION.

Pour exprimer la nature de cette ſurface, je choiſis à volonté trois axes AB, AC, AD perpendiculaires entr'eux, dont les deux AB & AC ſoient pris dans le plan de la planche, & le troiſiéme AD y ſoit perpendiculaire. Du point quelconque de cette ſurface Z je tire ſur le plan BAC la perpendiculaire ZY, & du point Y à l'axe AB la perpendiculaire YX, de ſorte que la poſition du point Z ſoit déterminée par les trois coordonnées AX, XY & & YZ, que je nommerai $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Maintenant la nature de la ſurface étant exprimée par une équation quelconque entre ces trois coordonnées x, y, z, je n'ai qu'à en conſidérer la differentielle, qui ſoit:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$$

les lettres X, Y, Z marquant des fonctions quelconques des coordonnées x, y, z, qui peuvent réſulter de la differentiation de l'équation en termes finis. A'preſent je conſidere premierement la figure EZ, qui réſulte, lorsqu'on coupe la ſurface propoſée par le plan IYZ parallele au plan BAD. La nature de cette ligne courbe EZ ſera donc exprimée par l'équation donnée, ſi l'on poſe $XY = y$ conſtante & partant ſon differentiel $dy = o$, de ſorte que pour cette courbe EZ nous aurons cette équation $X\,dx + Z\,dz = o$ entre les deux coordonnées $IY = x$ & $YZ = z$. Soit la ligne ZM perpendiculaire à cette ſection EZ, & on ſait que la ſounormale YM ſera $= \frac{z\,dz}{dx}$; or puiſque $\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z}$ nous aurons $YM = -\frac{Xz}{Z}$. Qu'on tire ſur le plan BAC, auquel la ſection IYZ eſt perpendiculaire, par le point M la ligne MP perpendiculaire à YM, & il eſt clair que toutes les lignes tirées du point Z à cette droite MP ſeront également perpendiculaires à la ſection EZ. Par conſéquent parmi ces lignes ſera compriſe celle ZP, qui eſt perpendiculaire, non ſeulement à la ſection EZ, mais auſſi à la ſurface propoſée même. Pour trouver cette perpendiculaire cherchée ZP, je coupe pareillement

ment la ſurface propoſée par un plan XZ parallele au plan C'AD, & ſuppoſant FZ la ſection, qui en réſulte, ſa nature ſera exprimée par l'équation générale, en faiſant $AX = x$ conſtante, & partant $dx = o$. Donc l'équation pour la ſection FZ ſera $Ydy + Zdz = o$. entre ſes coordonnées $XY = y$ & $YZ = z$. Qu'on tire de même à cette ſection FZ la perpendiculaire ZN, & on voit que la ſounormale ſera $YN = \frac{z\,dz}{dy} = -\frac{Yz}{Z}$. Tirant donc par N à YN la perpendiculaire NP dans le plan BAC auquel la ſection FZ eſt perpendiculaire, toutes les lignes tirées du point Z à la ligne NP ſeront également perpendiculaires à la ſection FZ. Par conſéquent ſi de l'interſection P des lignes MP & NP nous tirons la ligne PZ, elle ſera perpendiculaire à l'une & à l'autre des ſections EZ & FZ, & partant elle ſera perpendiculaire à la ſurface propoſée même EZF. Donc le point P dans le plan BAC, où la perpendiculaire cherchée ZP rencontre ce plan, ſe trouvera ſi on prend $YM = -\frac{Xz}{Z}$ & $YN = -\frac{Yz}{Z}$, & qu'on acheve le parallelogramme YMPN, dont le quatrieme angle P ſera au point cherché. Or il eſt clair, qu'ayant pour la ſurface l'équation differentielle $Xdx + Ydy + Zdz = o$, on en tirera les valeurs des lignes YM & YN en termes finis. Ce qu'il faloit trouver.

PROBLEME II.

V. *Trouver la nature des forces, qui peuvent agir ſur le point Z d'une ſurface propoſée, afin que leur moyenne direction ſoit perpendiculaire à cette ſurface.*

SOLUTION.

Soit comme auparavant $Xdx + Ydy + Zdz = o$ l'équation differentielle, qui exprime la nature de la ſurface propoſée entre les trois coordonnees $AX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$. Cela poſé, de quelques forces que ſoit ſollicité le point Z, elles peuvent toujours être réduites à trois, ſelon des directions paralleles aux trois axes A B, A C, A D. Soit Q la force, qui agit ſelon la direction parallele à A B, R la force qui agit ſelon A C, & S celle qui agit ſelon A D, de ſorte que ces forces tendent à augmenter les valeurs des variables x, y, z. Parce que la moyenne direction de ces forces doit être perpendiculaire à la ſurface, elle tombera dans la ligne Z P, dont nous venons de déterminer la poſition, ayant trouvé $YM = -\frac{Xz}{Z}$, & $YN = -\frac{Yz}{Z}$. Soit donc P la force, qui agiſſant dans la direction Z P ſoit équivalente aux trois forces propoſées Q, R, S. Or cette force P étant décompoſée ſelon les directions Z Y & Y P, donnera pour la direction Z Y la force $= \frac{YZ}{ZP}P$, & pour la direction parallele à Y P la force $= \frac{YP}{ZP}P$; celle-cy ſe decompoſera encore ſelon les directions Y M & Y N, & pour la direction Y M nous aurons la force $\frac{YM}{ZP}.P$, & pour l'autre direction Y N la force $= \frac{YN}{ZP}.P$. Donc la force P ſera reſoluë en trois, ſuivant des directions paralleles aux trois axes A B, A C, A D, dont la premiere qui agit parallelement à A B ſera $= \frac{YM}{ZP}.P$; la ſeconde, qui agit parallelement à A C ſera $= \frac{YN}{ZP}.P$; & la troiſieme, qui agit parallélement à A D ſera $= -\frac{YZ}{ZP}.P$; puisque la direction Z Y de la derniere eſt contraire à celle de l'axe A D, auquel nous la rapportons. Donc, afin que la force P perpendiculaire à la ſurface ſelon Z P ſoit équivalente aux forces propoſées Q, R, S, il faut que celles-cy ſoient égales reſpectivement à ces trois, dans lesquelles nous venons

nons de résoudre la force P. Et partant nous en obtiendrons ces égalités

$$Q = \frac{YM}{ZP} \cdot P;\ R = \frac{YN}{ZP} \cdot P\ \&\ S = -\frac{YZ}{ZP} \cdot P.$$

Or ayant trouvé $YM = -\frac{Xz}{Z}$, & $YN = -\frac{Yz}{Z}$, à cause de $YZ = z$ nous aurons $YP = \frac{z}{Z}\sqrt{(XX + YY)}$ & $ZP = \frac{z}{Z}\sqrt{(XX + YY + ZZ)}$. Soit pour abréger $\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = W$, & ayant $ZP = \frac{Wz}{Z}$ les trois égalités trouvées se changeront en celles-cy :

$$Q = -\frac{X}{W} \cdot P;\ R = -\frac{Y}{W} \cdot P\ \&\ S = -\frac{Z}{W} \cdot P$$

Par conséquent les trois forces Q, R, S, qui agissent suivant les directions des trois coordonnées x, y, z, seront entr'elles comme les quantités X, Y, Z, qui se trouvent dans l'équation differentielle $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$ qui exprime la nature de la surface, C. Q. F. T.

PROBLEME III.

VI. *Trouver la figure, à laquelle sera reduite une masse fluide, dont toutes les particules seront sollicitées par des forces quelconques.*

SOLUTION.

Soit Z un point dans la surface de cette masse fluide dont nous cherchons la figure, ou ce qui revient au même, il s'agit de trouver une équation entre les trois coordonnées $AX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, laquelle exprime la nature de la surface de la masse fluide proposée. Soit la differentielle de cette équation, que nous cherchons: $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$. Maintenant de quelques forces que soit sollicité le point Z, elles se pourront reduire selon les directions

 de

de nos trois coordonnées. Soit donc Q la force qui agit selon la direction parallele à A X, R la force qui agit selon la direction parallele à X Y, & S celle, qui agit dans la direction Y Z. Cela posé pour que la masse fluide soit en équilibre il faut que la moyenne direction de ces trois forces soit perpendiculaire à la surface. Pour cet effet nommant P la force équivalente aux trois forces données Q, R, & S, laquelle doit agir perpendiculairement à la surface, & pour abréger $W = \surd(XX + YY + ZZ)$, la solution du probleme précedent nous fourniera les équations suivantes,

$$Q = -\frac{X}{W}.P;\ R = -\frac{Y}{W}.P;\ S = -\frac{Z}{W}.P$$

Desquelles nous tirerons $X = -\frac{W}{P}.Q$; $Y = -\frac{W}{P}.R$ & $Z = -\frac{W}{P}.S$: ces valeurs étant substituées dans l'équation $Xdx + Ydy + Zdz = o$, qui doit exprimer la nature de la surface que nous cherchons, nous en obtiendrons cette équation :

$$Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$$

D'où l'on voit, que connoissant les forces Q, R, S, qui agissent sur chaque point de la masse fluide suivant les directions des trois coordonnées x, y, z, il n'y a rien de plus aisé que d'assigner l'equation differentielle, qui exprimera la nature de la figure de la masse fluide, qu'il faloit chercher. Or la force équivalente aux trois forces Q, R, S, qui agissent ensemble sur le point Z, sera $P = \surd(QQ + RR + SS)$, laquelle aura sa direction perpendiculaire à la surface : & pour trouver la situation de cette direction Z P, nous n'avons qu'à prendre $YM = -\frac{Qz}{S}$, & $YN = -\frac{Rz}{S}$, pour en remplir le parallelogramme rectangle Y M P N, dont l'angle P donnera le lieu du point P, où la perpendiculaire Z P à la surface rencontre le plan B A C. Du reste il faut remarquer que, pour que la figure soit possible, les forces Q, R, S, doivent être telles fonctions de x, y, z, afin que l'équation

tion $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ puiſſe être reduite à des quantités finies.

VII. On ſait qu'une équation differentielle, qui ne renferme que deux variables, eſt toujours poſſible, ou qu'il y a toujours une équation en termes finis entre les mêmes quantités variables, qui étant differentiée produiſe l'équation differentielle propoſée, quoique même fort ſouvent on ne ſoit pas en état de trouver cette équation integrale. Mais il n'en eſt pas de même des équations differentielles qui renferment trois quantités variables, comme x, y & z : car il y a quantité de cas où il eſt abſolument impoſſible, qu'une telle équation puiſſe réſulter par la differentiation d'une équation exprimée en termes finis. Un exemple d'une telle équation impoſſible eſt $x\,dx + y\,dy + x\,dz = o$: car puisque les deux premiers membres $x\,dx + y\,dy$ ſont integrables d'eux mêmes, il n'eſt pas poſſible de trouver un facteur, par laquel l'equation étant multipliée devienne integrable. On a même déjà decouvert les conditions, ſous lesquelles une telle équation devient poſſible ou impoſſible : & Mons. *Clairaut* & *d'Alembert* ont démontré qu'une équation de cette forme $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ n'eſt poſſible, que dans les cas où il y aura :

$$Q\left(\frac{dR}{dz} - \frac{dS}{dy}\right) + R\left(\frac{dS}{dx} - \frac{dQ}{dz}\right) + S\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dx}\right) = o.$$

Dans cette équation la formule $\frac{dR}{dz}$ marque le differentiel de la fonction R, en ne ſuppoſant que z variable, dont le differentiel dz eſt détruit par le denominateur dz. De même la valeur de $\frac{dS}{dy}$ ſe trouvera en ſuppoſant la ſeule y variable dans la differentiation de S : & pour trouver la valeur de $\frac{dS}{dx}$, dans la differentiation de S il ne faut ſuppoſer que x variable, en ſorte que ces expreſſions $\frac{dR}{dz}$, $\frac{dS}{dy}$, $\frac{dS}{dx}$,

$\frac{dQ}{dz}$ &c. ne renfermeront que des quantités finies, puisque les denominateurs détruisent les differentiels des numerateurs. Donc toutes les fois que la proprieté contenüe dans cette équation n'aura pas lieu entre les fonctions Q, R, S, l'équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ sera impossible ; & dans ces cas la masse fluide ne sauroit jamais parvenir à l'état de l'équilibre, comme a fort bien remarqué Mons. *Clairaut*, dans son Traité sur la figure de la terre.

VIII. Le cas le plus évident, auquel l'équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ devient possible, est si Q est une fonction de x, R une fonction de y, & S une fonction de z : car alors chaque membre de l'équation sera intégrable à part. Donc si chaque particule de la masse fluide est sollicitée de trois forces Q, R, & S, suivant les directions des trois axes AB, AC & AD, ou des trois coordonnées x, y & z: & que la force Q, qui agit dans la direction de x, soit exprimée par une fonction quelconque de x, la force R qui agit dans la direction de y par une fonction de y, & la force S par une fonction de z, alors l'équation differentielle $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ étant intégrable, la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation intégrale.

$$\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz = A$$

où A marque une quantité constante, que la quantité du fluide déterminera. Dans ce cas donc la masse fluide sera réduite à l'état de l'equilibre, & à chaque point de sa surface la valeur de cette formule $\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$ sera la même. Or si nous envisageons en général la nature de l'équilibre, nous appercevrons aisément, qu'elle exige de toutes parts une égalité dans l'action des forces, quoique nous ne sachions d'abord comme il faut estimer cette action des forces. Mais voyant dans le cas proposé, que c'est cette quantité $\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$ qui est par tout la même, nous en conclurrons surement, que cette même formule répresente la quantite d'action des forces, qui dans l'équilibre doit partout être la même. Donc la quantité d'action des forces Q, R, S, qui agissent sur le point Z de la maniere que je viens de supposer, sera $= \int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$:

dz: formule qui eſt parfaitement conforme aux principes de Mons. *de Maupertuis*, & dont je ferai voir plus clairement la force & l'importance dans les réfléxions ſuivantes.

PROBLEME IV.

IX. *Une maſſe fluide étant attirée vers pluſieurs centres fixes* C, C', C'' *par des forces proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances, trouver la figure, à laquelle cette maſſe fluide ſera réduite.* Fig. 2.

SOLUTION.

Soit Z un point quelconque dans la ſurface de la maſſe fluide propoſée, dont les diſtances aux centres fixes C, C', C'' ſoient nommées $CZ = v$, $C'Z = v'$, $C''Z = v''$, & les forces dont ce point Z eſt attiré vers ces centres ſoient des fonctions quelconques de ces diſtances V, V', V'', la force V qui tire dans la direction ZC, étant une fonction quelconque de v, la force V' dans la direction ZC' une fonction de v', & la force V'' dans la direction ZC'' une fonction de v''. Cela poſé, qu'on choiſiſſe comme auparavant trois axes perpendiculaires entr'eux, auxquels on tire du point Z les droites paralleles ZQ, ZR, ZY, ſuivant lesquelles on décompoſe les forces V, V', V'' qui agiſſent ſur le point Z. Pour cet effet on n'a qu'à concevoir des plans paralleles au plan QZR, qui paſſent par les points C, C', C'', lesquels ſeront traverſés perpendiculairement par la droite ZY aux points Y, Y', Y'', & dans ces plans on tire les droites CX, C'X' C''X'' paralleles à ZQ, & à celles-cy les perpendiculaires YX, Y', X', Y'' X'', qui feront paralleles à ZR. Maintenant on aura pour chaque centre C, C', C'' trois coordonnées qu'on nommera: pour le centre C; $CX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$: pour le centre C'; $C'X' = x'$, $X'Y' = y'$ $Y'Z = z'$ & pour le centre C''; $C''X'' = x''$; $X''Y'' = y''$ & $Y''Z = z''$. De ces coordonnées nous obtiendrons d'abord ces équations $vv = xx + yy + zz$; $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$ & $v''v'' = x''x'' + y''y'' + z''z''$. Et puisque les variables x, x' x'' ne different entr'elles que des quantités conſtantes, leurs differentiels ſeront égaux entr'eux d'où nous aurons $dx = dx' = dx''$, & par la même raiſon:

dy

$dy = dy' = dy''$; & $dz = dz' = dz''$. Maintenant la force ZC = V étant décompoſée ſuivant les directions Z Q, ZR & Z Y, donnera ces trois forces

$$ZQ = \frac{Vx}{v},\ ZR = \frac{Vy}{v}\ \&\ ZY = \frac{Vz}{v}$$

De la force Z C' réſulteront ces trois forces

$$ZQ = \frac{V'x'}{v'};\ ZR = \frac{V'y'}{v'},\ \&\ ZY = \frac{V'z'}{v'}$$

& de la force Z C'' ces trois

$$ZQ = \frac{V''x''}{v''};\ ZR = \frac{V''y''}{v''}\ \&\ ZY = \frac{V''z''}{v''}$$

Dont de l'action commune de ces trois forces le point Z ſera ſollicité

ſuivant la direction	par la force
Z Q	$\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}$
Z R	$\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}$
Z Y	$\frac{Vz}{v} + \frac{V'z'}{v'} + \frac{V''z''}{v''}$

Ces forces agiſſant ſelon des directions contraires à celles que nous avons données aux forces Q, R, S dans le probleme precedent, ſi nous ferons l'application, nous aurons :

$$Q = -\frac{Vx}{v} - \frac{V'x'}{v'} - \frac{V''x''}{v''}$$

$$R = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y'}{v'} - \frac{V''y''}{v''}$$

$$S = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z'}{v'} - \frac{V''z''}{v''}$$

Or

Or la nature de la ſurface de cette maſſe fluide ſera exprimée par cette équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = 0$. Mais ſubſtituant les valeurs trouvées pour Q, R, S, nous obtiendrons en changeant les ſignes cette équation.

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{V\,x\,dx}{v} + \dfrac{V'x'\,dx'}{v'} + \dfrac{V''x''\,dx''}{v''} \\ +\dfrac{V\,y\,dy}{v} + \dfrac{V'y'\,dy'}{v'} + \dfrac{V''\,y''\,dy''}{v''} \\ +\dfrac{V\,z\,dz}{v} + \dfrac{V'z'\,dz'}{v'} + \dfrac{V''z''\,dz''}{v''} \end{array}\right\} = v$$

Or les premieres formules, qui expriment les valeurs des diſtances v, v' v'' fourniſſent

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$$
$$x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz' = v'\,dv'$$
$$x''dx'' + y''dy'' + z''\,dz'' = v''\,dv''$$

Par conſéquent la figure de la maſſe fluide ſera exprimée par cette équation $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = 0$ dont chaque terme eſt integrable de lui même, & partant nous aurons pour la figure cherchée cette équation integrale : $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' = \text{Conſt.}$ P. Q. F. T.

X. La même équation ſe peut auſſi trouver, ſans qu'on ait égard à la poſition des trois axes, laquelle eſt arbitraire, & ne ſe trouve plus dans l'équation finale. Nous n'avons qu'à conſiderer un élément infiniment petit Z z, conçu d'une maniere quelconque depuis le point Z ſur la ſurface de la maſſe fluide, & il eſt d'abord clair, que pour que le point Z puiſſe être en équilibre ou demeurer en repos, il faut que les forces, qui ſollicitent le point Z ſelon la direction Z z évanouïſſent, àpres avoir decompoſe les forces V, V′, V″, qui y agiſſent, ſelon cette direction Z z, & d'autres qui y ſont perpendiculaires. Car ſi les forces ſuivant Z z ne ſe detruiſoient pas mutuellement, rien n'empêcheroit, que le point Z ne se mût actuellement suivant cette diréction & partant la masse fluide ne feroit pas en équilibre. On nomme ces forces *tangentielles*, qui résultent de cette décomposition selon la direction de l'élément Zz; ce seront donc ces forces tangentielles, qui doivent se detruire mutuellement, ou dont la somme doit être $= o$. Pour trouver ces forces tangentielles, je mene du point z sur les distances CZ, $C'Z$, $C''Z$ les perpendiculaires zt, zt', zt'', & nommant l'élément $Zz = ds$, nous aurons $Zt = -dv$, $Zt' = -dv'$ & $Zt'' = -dv''$. La ressemblance des triangles élémentaires Zzt, $Zz't'$, $Zz''t''$ aux triangles, qui se forment en baissant des perpendiculaires des points C, C', C'' sur la tangente ou l'élément Zz prolongé, donnera les forces tangentielles, qui résultent de chacune des forces V, V', V'' & de la force V on obtiendra la force tangentielle $= -\frac{V\,dv}{ds}$, de la force V' proviendra la force tangentielle $-\frac{V'\,dv'}{ds}$ & de la force V'' celle-cy $-\frac{V''\,dv''}{ds}$. Donc puis que la somme de ces forces tangentielles doit être égale à o, nous aurons pour la figure de la masse fluide cette équation $-\frac{V\,dv}{ds} - \frac{V'\,dv'}{ds} - \frac{V''\,dv''}{ds} = o$, ou bien celle-cy $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = o$, dont l'integrale sera:

$$\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' = C.$$

qui est la même équation, à laquelle nous a conduit la solution précedente.

XI. La masse fluide donc étant sollicitée par ces forces V, V', V'', que nous venons de considerer, parviendra dans un état d'équilibre, & la figure qu'elle prendra alors, aura cette proprieté que pour chaque point Z de sa surface la valeur de cette expréssion $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, sera partout la même. Donc puisque l'état d'équilibre exige de toutes parts une égalité d'action, il est d'abord clair

que

que cette même formule nous exprimera la quantité d'action, qui par son égalité se contrebalance de tous cotés ; & on ne sauroit douter, que cette formule, $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ ne fût la vraie mesure de la quantité d'action des forces, qui agissent sur la masse fluide, quand même on n'auroit point d'autres raisons, par lesquelles on seroit en état de determiner cette mesure. Or Mr. *de Maupertuis*, dans son excellente piece sur les loix du repos, a expliqué les principes, desquels il a tiré precisément la même mesure de la quantité d'action des forces : & ces principes lui ont fourni pour ce cas d'équilibre d'une masse fluide la même formule $\int V\,dv + \int V'dv' + \int V''dv''$, sans qu' il ait été obligé d'avoir recours aux principes ordinaires de la Mecanique. De là on tirera la régle suivante pour trouver la quantité d'action des forces, qui agissent sur un point quelconque Z : *Qu'on multiplie chaque force V par le differentiel de la ligne* $ZC = v$, *suivant la direction de laquelle cette force agit, du produit* $V\,dv$ *qu'on prenne l'integrale, & la somme de toutes ces integrales* $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ *donnera la quantité d'action de toutes ces forces sur le point Z.* Cette régle, qui coule immediatement des principes de Mr. *de Maupertuis*, est donc parfaitement d'accord avec la solution, que je viens de déduire des principes ordinaires de la Mecanique.

XII. Mr. *de Maupertuis* dans ses réflexions sur cette matiére est encore allé plus loin, & a soutenu que non seulement la quantité d'action des forces, qui agissent sur toutes les particules de la surface d'une masse fluide, étoit partout la meme ; mais que sa valeur étoit encore la plus petite, qu'il soit possible. Cette proprieté si convenable aux loix générales de la nature, qui affecte constamment de produire ses effets à moindres fraix, est aussi une suite fort naturelle de la solution, que je viens de trouver. Car puisque la valeur de cette expression $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ est partout la même, son differentiel sera égal à zero, ou $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = o$. Or on sait que, pour que la valeur d'une quantité variable soit la plus grande, ou plus petite, il faut, que son differentiel soit $= o$. Donc reciproquement, puisque dans la figure de la masse fluide le differentiel $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv''$ est $= o$, on pourra dire, qne son intégral $\int V\,dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ y eſt un *minimum*. Il eſt bien vrai que cette converſion n'eſt pas toujours juſte; car, par exemple, dans un cercle dont la nature eſt exprimée par cette équation $xx + yy = aa$, quoique le differentiel de la quantité $xx + yy$ ſoit égal à zero, on ne ſauroit dire que la quantité $xx + yy$ même y étoit un *maximum*, ou *minimum*. Mais outre que le principe général de la nature exige que la quantité d'action, que cette formule $\int V\,dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ exprime, ſoit un *minimum*, de ſorte que l'exception tirée de l'exemple du cercle, n'y puiſſe pas avoir lieu, je m'en vai prouver cette concluſion par un cas tout particulier, dont l'evidence ſautera d'abord aux yeux.

XIII. Suppoſons que la maſſe fluide vienne à être diminuée à l'infini, deſorte qu'elle ſoit réduite à un ſeul point Z: on demandera donc où ce point Z doit être placé, afin qu'étant attiré vers les centres de forces C, C', C'', il ſoit en équilibre: & on s'appercevra dabord que ce lieu d'équilibre du point Z ſera là, où la quantité d'action de forces, ou la valeur de l'expreſſion $\int V\,dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ ſera la plus petite. Quand j'aurai prouvé cela, on ne fera aucune difficulté de reconnoitre, que pour le cas d'une maſſe fluide d'une étendue finie, le même raiſonnement n'ait lieu: & que puisque le differentiel de cette même formule eſt également zero, la valeur de cette formule n'y ſoit un *minimum*. Car ſi cette concluſion n'étoit pas juſte dans le cas d'une maſſe fluide, elle ne le ſeroit pas non plus dans le cas, où la maſſe fluide eſt reduite à un ſeul point. Or le cas de l'état déquilibre d'un point, qui eſt ſollicité par des forces quelconques, que je m'en vai conſiderer, eſt celui d'où dépendent les premiers principes de la Statique, ſavoir la compoſition & la décompoſition des forces, dont la verité eſt par conſéquent d'autant moins aſſujetie à des doutes: quoique les demonſtrations qu'on en donne ordinairement ne ſoient pas aſſés rigoureuſes; puisqu'on y fait entrer la conſideratiou du mouvement, qui paroit tout à fait étrangére dans ce cas, où il ne s'agit que de l'état du repos. Feu Monſieur *Nicolas Bernoulli* a bien fait ſentir ce defaut général dans le I. Tome des Comment. de l'Acad. de Petersbourg, où il a donné une fort belle

belle démonſtration de ce principe de la Statique, qui eſt auſſi ingenieuſe, que purement geometrique, & fondée ſur des axiomes inconteſtables.

XIV. Cependant je me flatte, qu'on trouvera la démonſtration ſuivante, que je donnerai de ce même principe, également convaincante, quoiqu'elle ſoit fondée ſur quelque principe tiré de la Metaphyſique. Soit un point quelconque Z, qui étant ſollicité par trois forces V, V′ V″ ſelon les directions Z C, Z C′ Z C″, ſe trouve actuellement en équilibre : & on ſoutient qu' alors ces trois forces ſeront entr'elles comme les ſinus des angles oppoſés C′ Z C″ ; C Z C″, C Z C′. Pour démontrer cette verité, de laquelle depend toute la Statique, au lieu des forces, je concevrai des fils élaſtiques égaux entr'eux, qui étant attachés aux lignes A B, A′ B′, A″ B″, & les tirant vers les parois immobiles E F, E′ F′, E″ F″ agiſſent ſur le point Z par le moyen des verges Z C, Z C′, Z C″ de la même maniere, que les forces propoſées V, V′, V″. Soit la force de chaque fil élaſtique, dont il tache de ſe contracter, $= 1$, & le nombre des fils, qui ſont attachés à la ligne A B pour l'approcher au parois E F, ſoit $= V$, afinque toute la force unie de ces fils élaſtiques devienne $= V$. & que le point Z par ce moyen ſoit ſollicité par la même force V dans la direction Z C. De même, ſoit le nombre des fils ſemblables attachés à la ligne A′ B′ $= V'$, & le nombre des fils attachés à la ligne A″ B″ $= V''$ afinque le point Z ſoit ſollicité ſuivant les directions Z C′ & Z C″ par les forces V′ & V″. Fig 3.

XV. Cela poſé il eſt clair que ces forces n'agiſſent qu' entant que les fils élaſtiques tachent de ſe raccourcir, & le point Z ne ſauroit être en repos, que lorſqu'il ſera impoſſible, que la contraction de tous ces fils enſemble ſe puiſſe augmenter davantage. On m'accordera donc ſans aucune difficulté, que le point Z ſera alors en équilibre, lorſque les fils ſe ſeront raccourcis autant qu'il ſera poſſible, ou lorſque la ſomme de tous les fils pris enſemble ſera la plus petite : car ſi le point Z pouvoit être trainé dans un autre endroit z, où le raccourciſſement des fils, conſiderés tous enſemble, ſeroit encore plus grand, il n'y a aucun doute, que les forces ne le transportaſſent dans cet endroit là, avant que l'état d'équilibre arrive. Ce principe est si evident, que pour peu qu'on y réflechisse on sera convaincu de sa verité : puisque ces fils se contracteront effectivement, tandis qu'une plus grande contraction sera possible, & ils ne cesseront d'agir, qu'il ne s'oppose des obstacles insurmontables, qui rendront impossible une plus grande contraction. Donc, si nous nommons la longueur des fils élastiques A G $= x$, celle des fils $A' G' = x'$ & $A'' G'' = x''$, la longueur de tous les fils pris ensemble sera $= V x + V' x' + V'' x''$, & celle-cy sera par consequent la plus petite, lorsque le point Z est réduit dans l'état d'équilibre.

XVI. Donc, si le point Z sera transporté infiniment peu de l'endroit où il est en équilibre, la valeur de la formule $V x + V' x' + V'' x''$ demeurera encore la même, ou son differentiel $V dx + V' dx' + V'' dx''$ sera égal à zero ; car je regarderai ici les forces V, V' V', comme constantes, de sorte qu'elles n'augmentent ni ne diminuent, pendant que les fils élastiques s'allongent, ou se raccourcissent : je fai cette hypothese, afin que le cas soit plus evident & moins embarassé, puisqu'il ne sera pas difficile ensuite de juger des cas, où les forces V, V' V'' sont elles-mêmes variables. Qu'on conçoive donc le point Z transporté en z par l'espace infiniment petit $Z z$, & comme un tel changement se peut faire d'une infinité de manieres, j'en choisirai celui où le point z est également éloigné de A B, que le point Z, de sorte que par ce changement les fils A G, B H ne souffrent aucune alteration. Mais comme le point Z par ce mouvement $Z z$ s'est approché plus de $E' F'$, & qu'il s'est éloigné plus de $E'' F''$, les fils $A' G' B' H'$, se feront raccourcis, & les fils $A'' G''$, $B'' H''$ allongés : & partant la ligne $A' B'$, à laquelle sont attachés les fils, sera parvenue en $a' b'$, & la ligne $A'' B''$ en $a'' b''$: donc le raccourcissement de ceux-là sera $= A' a'$, & l'allongement de ceux-cy $= A'' a''$. Or en vertu de la proprieté des plus petits, l'allongement total d'un coté $V''. A'' a''$ doit être égal au raccourcissement de l'autre coté $V'. A' a'$. Tirons les lignes $z c''$, $z c'$ égales & paralleles aux lignes $Z C'$ & $Z C''$, & y ayant mené les perpendiculaires $Z q$, $z p$, le raccourcissement $A' a'$ sera $= Z p$, & l'allongement $A'' a'' = z q$, donc il y aura $V'. Z p = V''$.

$= V''. zq$, ce qui donnera cette proportion $V' : V'' = zq : Zp$. Or prenant Zz pour le ſinus total, zq ſera le ſinus de l'angle zZq, ou bien de CZC'' à cauſe des angles droits CZz & $C''Zq$; de même Zp ſera le coſinus de zZp & partant le ſinus de CZC', d'où il s'enſuit que les forces V' & V'' ſeront entr'elles comme les ſinus des angles CZC'' & CZC', & de là on tirera cette proportion connuë :

force ZC : force ZC' : force $ZC'' = \sin C'ZC'' : \sin CZC'', \sin CZC'$.

XVII. De cette nouvelle démonſtration du principe général de la Statique, en vertu duquel trois forces appliquées à un point ſont en équilibre, lorſque ces forces ſont entr'elles, comme les ſinus des angles oppoſés, on ſera convaincu, que non ſeulement la formule differentielle $V\,dx + V'\,dx' + V''\,dx''$ doit être $= o$, mais auſſi que la valeur de la formule finie $Vx + V'x' + V''x''$ y eſt la plus petite. J'ai ſuppoſé ici les forces V, V', V'' conſtantes, ou qu'elles demeurent les mêmes, quelque changement que ſubiſſent les fils élaſtiques que j'ai ſubſtitués à leurs places: mais la formule differentielle demeurera la même, quoique les forces ſoient variables : on n'a pour cet effet qu'à nommer les diſtances $ZC = v$, $ZC' = v'$ $ZC'' = v''$, & on aura $dx = -dv$, $dx' = -dv'$, $dx'' = -dv''$. De plus, ſi les forces V, V', V'' ſont des fonctions quelconques de ces diſtances v, v', v'', l'état d'équilibre du point Z donnera la même équation differentielle $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = o$, qui a été trouvée dans la ſolution du probleme, & à préſent il n'y a aucun doute que ſon integral $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ ne ſoit auſſi un *minimum*. Or ſi cette formule eſt un *minimum* dans le cas, où les forces n'agiſſent que ſur le ſeul point Z, elle ſera pareillement un *minimum* dans le cas d'une maſſe fluide quelconque, qui eſt ſollicitée par les mêmes forces. Par conſéquent, nous avons les plus fortes raiſons de ſoutenir, que la quantité d'action des forces V, V', V' ſur un point quelconque Z, doit être exprimée par cette formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ puis-que cette formule ſe trouve, ſoit qu'on conſidere le point Z tout ſeul, ou qu'il appartienne à une maſſe fluide quelconque. Voilà donc un appuy inébranlable, ſur lequel eſt fondée la

règle

regle donnée cy-dessus pour déterminer la quantité d'action des forces quelconques sur un point donné.

XVIII. Les réfléxions suivantes mettront encore davantage dans tout son jour cette idée de la quantité d'action des forces, & on en entendra plus clairement la raison, pourquoi la quantité d'action des forces V, V′, V″ sur le point Z doit être exprimée précisément par la formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$. Dans la recherche précedente, où j'ai substitué des fils élastiques égaux entr'eux au lieu des forces V, V′, V″, l'état ou l'action de chaque force appliquée au point Z′ a été representée par la somme des longueurs de tous les fils élastiques, qui tiennent lieu des forces: car nous avons vu, si la longueur des fils élastiques A G substitués à la place de la force V est nommée $= x$, & que V marque le nombre de ces fils, puisque la force de chacun a été posée $= 1$; alors la somme totale de tous ces fils étoit $= Vx$: ce sera donc cette quantité Vx, qui répréfente l'action de cette force V sur le point Z, puisque Vx exprime l'état actuel de contraction des fils élastiques, de laquelle dépend l'action de la force V. Or posant toute la distance du point Z aux parois immobiles E F $= v$, & la distance constante Z C $= a$, nous aurons $x = v - a$, & l'action de la force V sera $= V(v - a)$ pourvu que que la force V soit constante, ou que sa quantité ne depende point de la distance v. Or en cas que la force V dépende de la distance v, ou ce qui revient au même de la longueur des fils élastiques x, alors le nombre des fils V seroit variable, & leur longueur totale ne seroit plus Vx ou $V(v - a)$, mais on s'appercevra aisement que pour avoir cette longueur totale, il faudra prendre l'integrale de $V\,dx$ ou de $V\,dv$, y ayant égard à la variabilité de V. Ce sera donc alors $\int V\,dv$, qui exprime la longueur totale des fils élastiques substitués au lieu de la force V, & partant il est évident que cette même formule $\int V\,dv$, exprimera aussi la quantité d'action de la force V sur le point Z; & on comprendra de même que la quantité d'action de plusieurs forces V, V′, V″ sera $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$.

XIX. Mais il y a plus : la formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ est non ſeulement d'un ſi grand uſage dans l'état de repos, c'eſt auſſi d'elle que dépend principalement la determination du mouvement. Car ſuppoſons qu'un corps ſollicité vers les centres C, C', C'' par des forces V, V' V'' ait parcouru déjà l'arc A Z d'une courbe quelconque, ayant commencé ſon mouvement du repos en A : & ſoit u la viteſſe, que ce corps aura acquiſe au point Z : & $u+du$ celle qu'il aura au point z, aprés avoir parcouru l'élément d'eſpace, $Zz = ds$. Soient les diſtances du corps en Z aux centres C, C', C'' nommées $CZ = v$, $C'Z = v'$, $C''Z = v''$, & V, V', V'' les forces dont le corps eſt attiré à ces centres. Qu'on tire de z ſur les diſtances CZ, C'Z, C''Z les perpendiculaires zt, zt', zt'' & on aura $Zt = dv$, $Zt' = -dv'$, $Zt'' = -dv''$, d'où nous tirerons les forces tangentielles $-\frac{V\,dv}{ds}$, $-\frac{V'\,dv'}{ds}$; $-\frac{V''\,dv''}{ds}$, & partant le mouvement du corps, pendant qu'il parcourt l'élément $Zz = ds$ ſera acceleré par la force $-\frac{V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv''}{ds}$, qui étant multipliée par l'eſpace ds ſera égale au produit dela viteſſe u par ſon differentiel du : deſorte que nous aurons cette équation $u\,du = -V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv''$, dont l'integrale ſera $\frac{1}{2}uu = C - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$, où la conſtante C doit être priſe, en ſorte qu'au point A la viteſſe devienne $= o$. Donc le demi-quarré de la viteſſe au point Z, ou ce qui revient au même, la hauteur duë à la viteſſe ſera exprimée par la formule $C - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$, qui conſiſte de deux membres, dont le premier C dépend uniquement du point A où le mouvement a commencé ; mais l'autre membre $-\int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$ dépend uniquement du point Z où le corps eſt parvenu. Par conſéquent la formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, qui dans l'etat de repos marque la quantité d'action des forces ſur le point Z, exprime auſſi dans l'etat de mouvement la partie du quarré de la viteſſe, laquelle dépend du point Z, de ſorte que cette for-

Fig. 4.

mule

mule eſt de la derniere importance, auſſi bien dans l'etat de repos, que dans celui de mouvement.

XX. Ayant donc établi la veritable idée de la quantité d'action des forces quelconques ſur un point donné, ſoit qu'il ſe trouve en repos, ou en mouvement, je ferai voir plus clairement le grand uſage de cette idée, en conſiderant pluſieurs centres fixes C, C', C'' &c. qui attirent à ſoi avec des forces V, V', V'' &c, proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances v, v' v'', &c. de ſorte que la quantité d'action de ces forces ſur un point Z, dont les diſtances à ces centres ſont v, v', v'' &c. eſt $= \int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$ &c. Et d'abord pour trouver le lieu, où il faut placer un corps conſideré comme un point, afin qu'il demeure en repos, ou en équilibre, entre ces centres de forces, je viens de montrer que ce point cherché Z ſera là, où la valeur de cette formule $\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$, ou la quantité d'action, eſt la plus petite. Par le moyen de cette proprieté on trouvera aiſement le lieu de ce point Z, en transportant ce point Z par un eſpace infiniment petit Zz, & ſuppoſant le differentiel $V\, dv + V'\, dv' + V''\, dv''$ + &c. égal à zero : comme j'ai fait voir dans le cas, où le point Z étoit ſollicité de trois forces. C'eſt de ce cas, que dépend la compoſition & la réſolution des forces, aquelle étant la baſe de toute la Statique, on voit que ce ſeul principe de la quantité d'action fournit le fondement de cette ſcience.

XXI. En ſecond lieu, ſi on conſidere une maſſe fluide dont toutes les particules ſont attirées à ces centres de forces, C, C', C'' &c. on trouvera encore la figure, que cette maſſe fluide prendra, par le ſeul moyen de la quantité d'action : car il faut, comme j'ai fait voir que la quantité d'action des forces ſoit la même partout, ſur chaque point de la ſurface de la maſſe fluide : ou la nature de cette ſurface ſera exprimée par cette équation :

$$\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv'' + \text{\&c.} = \text{Conſt.}$$

Ou bien cette maſſe fluide ne ſauroit être en repos, que dans un tel endroit & avec une telle figure, afin que la quantité d'action totale ſoit la plus petite qu'il eſt poſſible : c. à. d. pour que la maſſe fluide

ſoit

ſoit en équilibre, il faut que la valeur de cette formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ + &c. ſoit un *minimum*. C'eſt de ce principe que dépend toute l'hydroſtatique, ou la theorie de l'équilibre des liqueurs. Car ſi nous ne conſiderons qu'une ſeule force centrale, pour avoir le cas de la peſanteur naturelle, nous aurons pour l'état d'équilibre d'une maſſe fluide l'équation $\int V\,dv = C$, & puiſque V eſt une fonction de v, la diſtance v ſera conſtante; donc tous les points de la ſurface fluide doivent être également éloignées du centre de la terre, ou la ſurface d'un fluide ſera horizontale.

XXII. Ce ne ſera pas donc ſeulement la quantité d'action des forces ſur un ſeul point Z, qui eſt la plus petite, mais on reconnoitra aiſement que dans une maſſe fluide, qui eſt en équilibre, la ſomme totale de toutes les quantités d'action des forces ſur tous les élémens de la maſſe fluide doit être un *minimum*. Ainſi ſi l'on nomme dS une particule quelconque de la maſſe fluide, & que la quantité d'action des forces V, V', V'' &c. ſur cette particule, ſoit $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ + &c. entant qu'elle n'eſt conſiderée que comme un point, il eſt clair que la quantité d'action ſur l'élément dS ſera $= dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$, puisque dS eſt déjà regardé comme un aſſemblage de pluſieurs points, ſur chacun deſquels la quantité d'action des forces eſt $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ + &c. de ſorte que cette quantité doit être multipliée par le nombre des points de l'élément dS, *c. à. d.* par l'élément dS même, pour avoir la quantité d'action des forces ſur cet élément dS. Par conſéquent la quantité d'action des forces ſur toute la maſſe fluide ſera $= \int dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$. Ce ſera donc cette expreſſion integrale, dont la valeur doit être la plus petite; puiſqu'elle comprend la ſomme totale de toutes les quantités d'action des forces ſur toutes les particules de la maſſe fluide. De là il eſt aiſé de tirer cette régle générale pour trouver l'état d'équilibre d'un corps quelconque ſollicité par des forces quelconques: *Qu'on multiplié chaque élément du corps par la quantité d'action des forces, qui y agiſſent, & l'intégrale de ce produit, qui ſera la quantité d'action totale ſur le corps entier, doit*

être

être un minimum. Quiconque aura compris la réalité de l'idée de la quantité d'action des forces sur un point, que je viens d'établir par les plus fortes raisons, accordera sans difficulté, que dans tous les cas d'equilibre la somme de toutes ces quantités d'action doit être la plus petite.

XXIII. Si le corps entier, dont nous cherchons l'état d'equilibre, est infiniment petit, de sorte que dS exprime tout ce corps, alors la quantité d'action totale sera $= dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ laquelle sera un *minimum*, si $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ aura la plus petite valeur, puisque dS est constant : & c'est le cas que j'ai déjà dévelopé cy-dessus. Mais si le corps proposé est une masse fluide, dont dS est un élément, il n'est plus si aisé, que la figure où $\int dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ est un *minimum*, sera la même, que j'ai trouvée auparavant, & qui avoit cette proprieté, qu'à chaque point de sa surface la quantité d'action $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ étoit d'une valeur constante; Car en général il est extrémement difficile de déterminer la figure d'un solide, où une telle formule $\int dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ est un *maximum*, ou un *minimum*, puisque cette methode n'est encore asses cultivée, que pour les figures décrites sur un plan. Donc, pour affermir la verité de cette régle générale, & pour faire voir qu'elle conduit à la même solution, que j'ai dejà trouvée, je considererai une masse fluide infiniment mince, couchée sur un plan, & dont
Fig. 5. toutes les particules sont poussées vers plusieurs centres fixes C, C', C'' &c. situés dans le même plan.

XXIV. Soit donc A M la surface de cette masse fluide, quand elle sera en équilibre ; & pour trouver cette figure qu'on prenne les coordonnées $CX = x$, $XM = y$, & pour les autres centres soient des coordonnées semblables $C'X' = x'$, $X'M = y'$; $C''X'' = x''$, $X''M = y''$: & il y aura $dx = dx' = dx''$ & $dy = dy' = dy''$. Mais avant que de considérer le dernier point M, il faut chercher la quantité d'action des forces sur l'élément $Xx\,mM$ de l'aire C X M A, qui nous répresente la masse fluide. Pour cet effet qu'on prenne de cet élément $Xx\,mM$ une particule quelconque Yy, & qu'on nomme en

atten-

attendant $XY = y$, $X'Y = y'$, $X''Y = y''$: & la particule Yy ſera $= dx\,dy$. Maintenant ſoient les diſtances de cette particule aux centres des forces: $CY = v$, $C'Y = v'$, $C''Y = v''$, & les forces mêmes, comme jusqu'ici, V, V', V'': de ſorte que nous ayons $vv = xx + yy$; $v'v' = x'x' + y'y'$; $v''v'' = x''x'' + y''y''$. Or la quantité d'action de ces forces ſur le point Y étant $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, la quantité d'action ſur la particule Yy ſera $= dx\,dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$ dont l'integrale, en ſuppoſant x conſtant, donnera la quantité d'action des forces ſur tout l'elément $XxmM$, pourvu qu'on avance le point Y jusqu' en M, & que les ſignifications des y, y', y'' ſoient les mêmes, que je leur ai données au commencement. Par conſéquent la quantité d'action des forces ſur tout l'élément de l'aire $XxmM$ ſera $= dx \int dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$, ſuppoſant dans cette integrale l'abſciſſe x conſtante, & la ſeule appliquée y variable. Je nommerai pour abréger cette integrale, qui réſulte en ſuppoſant x conſtante, $\int dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.) = U$, deſorte que le differentiel de U en ſuppoſant encore x conſtante ſoit $dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$, ou ſi nous poſons en général $dU = M\,dx + N\,dy$, il y aura $N = \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$.

XXV. Ayant ainſi trouvé la quantité d'action ſur l'élément $XxmM$, laquelle eſt $= U\,dx$, il eſt clair que la quantité d'action ſur toute l'aire C X M A ſera $= \int U\,dx$. Par conſéquent cette quantité $\int U\,dx$ doit être la plus petite entre toutes les figures, que cette aire pourroit prendre; il s'agit donc de trouver parmi toutes les figures de la même aire, $\int y\,dx$, celle où la valeur de cette formule $\int U\,dx$ eſt la plus petite. Cette queſtion revient au même que ſi l'on cherchoit parmi toutes les courbes poſſibles celle, où cette formule $\alpha \int y\,dx + \int U\,dx$ ou $\int dx\,(U + \alpha y)$ eſt un *minimum*. Pour cet effet ſuivant ma methode, en comparant cette formule avec $\int Z\,dx$, & poſant $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + \&c.$ la courbe cherchée ſera $o = N - \frac{dP}{dx}$. Mais puisque $Z = U + \alpha y$, & que U ne renferme que les variables x & y, nous aurons $N = o$, ou bien le differentiel de $U + \alpha y$, en ne ſuppoſant que y variable doit être $= o$. Et partant le differentiel de U, en ne ſuppoſant que y variable, étant $= dy\ (\int V\,dv + \int V'\,dx' + \int V''\,dx'')$ & celui de $\alpha y = \alpha\,dy$, nous en obtiendrons pour la courbe cherchée A M cette équation $o = \alpha + \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ ou bien la quantité d'action des forces ſur chaque point M de la courbe A M doit être la même ; tout comme il a été trouvé par les autres principes. Ce bel accord de notre principe général dans ce cas ne laiſſera pas le moindre doute, qu'il ne ſoit pareillement d'accord dans tous les autres cas.

XXVI. On ſera encore plus fortement convaincu de la verité de ce principe général, ſi l'on remarquera, que la formule, dont la valeur eſt la plus petite dans la figure des fils flexibles, eſt parfaitement conforme à ce principe. Car ſoit A M la figure d'un fil parfaitement flexible, dont tous les élémens ſont ſollicités aux centres C, C', C'' par des forces V, V', V'' &c. & en vertu de notre principe le fil demeurera en repos, ſi la ſomme de toutes les actions des forces ſur le fil A M ſera la plus petite. Pour trouver cette ſomme, il faut chercher la quantité d'action ſur l'élément $Mm = ds$, & puiſque, en nommant les diſtances $CM = v$, $C'M = v'$, $C''M = v''$ la quantité d'action ſur le point M eſt $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ l'action ſur l'élément $Mm = ds$ ſera $= ds\ (\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$, & partant la ſomme de toutes les actions ſur la partie du fil A M, ſera l'integrale $\int dS\ (\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$. La valeur de cette formule étant renduë un *minimum*, donnera la figure du fil lors qu'il s'eſt mis en équilibre. Or ayant determiné dans le Mémoire precedent la figure d'un tel fil par les principes ordinaires de la Mecanique, j'ai déjà remarqué que cette figure ſe trouve, ſi l'on cherche la courbe, où la valeur de cette meme formule $\int dS\ (\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$ eſt la plus petite.

XXVII. Je ne puis pas paſſer ſous ſilence une fort belle proprieté de la courbe d'un fil parfaitement flexible, & d'une épaiſſeur par tout égale, à laquelle cette ſolution conduit. Soit A M ce fil parfai-
Fig. 6. tement flexible, & partout de la même epaiſſeur, dont chaque point M eſt

M est attiré à trois centres C, C', C'' par des forces V, V', V'', qui sont des fonctions quelconques des distances $CM = v$, $CM = v'$, $C''M = v''$. Qu'on nomme les abscisses $CX = x$, $C'X' = -x'$, $C''X'' = -x''$ les appliquées $XM = y$, $X'M = y'$, $X''M = y''$ & puisque $dx = dx' = dx''$ & $dy = dy' = dy''$ l'élément de la courbe Mm sera $= ds = \surd(dx^2 + dy^2)$. Soit maintenant $dy = p\,dx$, & $dp = q\,dx$; & la methode des plus grands & plus petits a fourni pour la courbe du fil AM l'equation suivante

$$\frac{V(y-px)}{v} + \frac{V'(y'-px')}{v'} + \frac{V''(y''-px'')}{v''} = \frac{q}{1+pp}(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

où la formule $\int V dv + \int V' dv + \int V'' dv''$ exprime la quantité d'acti, on sur le point M. Qu'on divise de part & d'autre par $\surd(1+pp)$, & puisque le rayon de la developée $MO = \frac{(1+pp)\surd(1+pp)}{q}$ nous aurons cette equation

$$\frac{\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''}{MO} = \frac{V(y-px)}{v\surd(1+pp)} + \frac{V'(y'-px')}{v'\surd(1+pp)} + \frac{V''(y''-px')}{v''\surd(1+pp)}$$

Or $\frac{y - px}{\surd(1+pp)} = \frac{y\,dx - x\,dy}{ds}$ exprime la perpendiculaire CT qui est menée du centre C à la tangente MT; car baissant du point X sur la même tangente la perpendiculaire XP & CQ sur XP, on voit d'abord que $XP = \frac{y\,dx}{ds}$ & $XQ = \frac{x\,dy}{ds}$, de sorte que $CT = \frac{y\,dx - x\,dy}{ds} = \frac{y - px}{\surd(1+pp)}$; Donc si des autres centres C', C'' on tire pareillement sur la tangente les perpendiculaires C'T', C''T'', l'equation trouvée se changera en cette forme:

$$\frac{\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''}{MO} = \frac{V}{v}.CT + \frac{V'}{v'}C'T' + \frac{V''}{v''}C''T''$$

Multiplions par MO, & $\frac{CT.MO}{v} = \frac{CT.MO}{CM}$ exprimera la

ligne

ligne M R, ayant baiſſé ſur la ligne C M prolongée du point O la perpendiculaire O R. Ce qui nous fournit cette proprieté : *Si du centre* O *du cercle osculateur en* M *on mene ſur les diſtances* CM, C′M, C″ M *prolongées les perpendiculaires* O R, O R′, O R″; *alors la quantité d'action des forces ſur le point* M, *c'eſt à dire* $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ *ſera égale à* V. M R + V′. M R′ + V″. M R″.

XXVIII. Mais notre principe eſt encore plus général, & s'étend même aux fils elaſtiques, comme j'ai fait voir dans mon Mémoire precedent ; il s'agit ſeulement de ramener l'effet de l'elaſticité à l'idée de la quantité d'action. Qu'on retienne toutes les dénominations du cas précedent, où chaque particule du fil A M eſt attirée vers les centres C, C′, C″ par les forces V, V′, V″, & ſoit le rayon de la developpée $MO = r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$, duquel dépend la force de l'élaſticité, qu'on ſuppoſe ordinairement $= \frac{A}{r}$, ou $= \frac{S}{r}$, ſi le fil n'eſt pas partout de la même épaiſſeur, de ſorte que l'élaſticité eſt dans un endroit plus grande, ou plus petite que dans un autre. Or pour rendre la ſolution plus générale, je ſuppoſerai que l'elaſticité en M ſoit = T, cette lettre T marquant une fonction quelconque de r, qui renferme même la longueur du fil, en cas qu'il ſoit d'une élaſticité variable. Cela poſé, les principes de la Mecanique nous fourniſſent pour la courbe de ce fil élaſtique cette équation

$$T = +\int dy \int ds \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''} + \&c.\right) - \int dx \int ds \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''} + \&c.\right)$$

Pour trouver cette même équation par la methode des plus grands & plus petits, puiſque la quantité d'action des forces V, V′. V″ ſur le point M eſt $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ on n'aura qu'à y ajouter la quantité d'action de l'elaſticité, que je viens de nommer T: on

Or nommant $\frac{1}{r} = t$, de forte que t foit proportionnel à la courbure même, on comprendra aifément que, comme de la force V eft réfulté l'action $\int V\, dv$, ainfi de la force T réfultera l'action $\int T\, dt$. Par conféquent, nommant la maffe de l'élément du fil $Mm = dS$, la fomme totale de toutes les actions fur la portion du fil AS fera $= \int dS\, (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c + \int T\, dt)$ & celle-cy fera la plus petite, quand le fil fe trouve en équilibre: & cette proprieté doit avoir lieu en vertu de notre principe, non feulement, lorsque les centres des forces C, C', C'' avec la figure du fil fe trouvent dans le même plan, mais auffi lorsque leur fituation eft quelconque.

XXIX. Mais ayant établi ce principe général, que dans tout état d'equilibre la fomme de toutes les actions des forces fur toutes les particules du corps, qui eft en équilibre, eft un *minimum*, je remarque de plus que ce même principe a lieu dans tous les mouvemens libres des corps, de quelques forces qu'ils foient follicités. Soit un corps, aprés avoir reçu un mouvement quelconque, attiré conftamment vers plufieurs centres de forces C, C', C'', & que les forces V, V', V'' foient exprimées par des fonctions quelconques des diftances $CM = v$, $C'M = v'$, $C''M = v''$; ce corps éprouvera à chaque inftant une autre quantité d'action de ces forces, & au moment qu'il fe trouve en M, la quantité d'action eft $= \int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$, comme j'ai fait voir au commencement de ce difcours. Donc nommant l'élément du tems $= dt$, la quantité d'action inftantanée, que le corps foutient pendant cet élément de tems dt, fera $= dt\, (\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv'' + \&c.)$: & partant la fomme de toutes les actions inftantanées, auxquelles le corps eft expofé pendant le tems fini $= t$, fera $= \int dt\, (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$. Maintenant il eft fort naturel, *que ce corps prendra une telle route, que cette fomme de toutes les actions inftantanées y foit un* minimum. Voilà donc un nouveau principe général, pour le mouvement libre des corps follicités par des forces quelconques, dont la verité faute d'a-

 bord

bord aux yeux, dés qu'on fait réfléxion sur l'idée de la quantité d'action, que j'ai établie.

XXX. En se servant de ce principe on trouvera en effet les mêmes courbes pour le mouvement des corps sollicités par des forces quelconques, auxquelles les principes ordinaires de la mecanique nous conduisent. Car ce principe ne differe point de celui, dont je me suis servi pour déterminer ces mêmes courbes par la methode *de maximis & minimis* : où j'ai fait voir, tout comme le principe de Mr. de Maupertuis exige que nommant l'élément de la courbe $Mm = ds$ & la vitesse du corps en $M = u$, la valeur de cette formule $\int u\,ds$ étoit toujours un *maximum*. Or j'ai remarqué cy-dessus que la quantité d'action $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ étant retranchée d'une quantité constante donne le quarré de la vitesse uu, de sorte que $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' = C - uu$; donc, suivant notre nouveau principe, cette formule $\int dt\,(C - uu)$, où $Ct - \int uu\,dt$ sera un *minimum*, ou bien pendant le même tems t la valeur de cette formule $\int uu\,dt$ ou à cause de $ds = u\,dt$, la valeur de celle-cy $\int u\,ds$ doit être un *maximum*, tout comme j'ai prouvé dans mon Traité *de Maximis & Minimis*.